

ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 26 МАТЕМАТИКИ Выпуск 2
2019

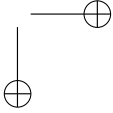
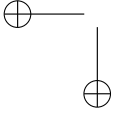
ДВАДЦАТЫЙ
ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ
(ОСЕННЯЯ ОТКРЫТАЯ СЕССИЯ)

22 сентября — 6 октября 2019 г.
г. Сочи

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ
Часть I

Под редакцией *И. А. Соколова*,
А. К. Горшенина, *А. Р. Симоняна*, *В. И. Хозлова*

МОСКВА • «ОПиПМ» • 2019



**XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ**
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

**ОРГАНИЗАТОРЫ И СПОНСОРЫ
СИМПОЗИУМА**

- Управление по науке и образованию Администрации г. Сочи
- Сочинский государственный университет, в т. ч.
 - инженерно-экологический факультет
- Сочинский научно-исследовательский центр РАН
- Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии наук
- Академия криптографии Российской Федерации
- Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова*;
- Редакции журналов: «Информатика и ее применения»; «Обозрение прикладной и промышленной математики» (ОПиПМ); «Прикладная информатика»; «Теория вероятностей и ее применения» (Научное издательство «ТВП»)
- Российский национальный комитет по индустриальной и прикладной математике
- Российский Фонд фундаментальных исследований**

(* В стадии согласования.)

** Симпозиум поддержан грантом РФФИ № 19-07-20019.

Объединенный Оргкомитет симпозиума

Академик И. А. Соколов (председатель),
академик В. А. Бабешко, академик А. А. Боровков, академик Ю. Г. Евтушенко,
академик А. Б. Жижченко, академик И. А. Ибрагимов, академик Б. С. Кашин,
академик В. И. Колесников, академик С. В. Кисляков, академик А. Б. Куржанский,
академик В. П. Маслов, академик В. А. Сойфер, академик Б. Н. Четверушкин,
академик А. Н. Ширяев, академик В. П. Шорин,
член-корр. Д. А. Губайдуллин, член-корр. А. В. Ильин, член-корр. А. Ф. Титов,
Ю. Б. Бутин, А. Н. Волков, Л. Ф. Выюненко, В. У. Галустов, А. К. Горшенин,
В. И. Дементьева, А. С. Дудов, А. М. Зубков, С. А. Корниенко, А. А. Левицкая, А. А. Лиховид,
О. Н. Медведева, Ю. М. Окунев*, О. О. Рыбак, А. Р. Симонян, Г. В. Слюсарев, В. И. Хохлов,
А. Б. Чернышев, А. Ф. Чипига, С. Я. Шоргин, Э. Г. Янукян

**Оргбюро Всероссийских симпозиумов
по прикладной и промышленной математике**

Академик И. А. Соколов (председатель),
В. И. Хохлов (зам. председателя),
В. И. Астафьев, Г. И. Белявский, Л. Ф. Выюненко, Л. И. Герасимова (секретарь),
В. В. Мазалов, А. Р. Симонян, Е. И. Улитина

Локальный Оргкомитет

А. Р. Симонян (председатель), Е. И. Улитина (ученый секретарь),
А. В. Волков, С. Ж. Симаворян

НАУЧНАЯ ПРОГРАММА СИМПОЗИУМА (список минисимпозиумов) опубликована на с. 190.

**XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ**
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

**Научные доклады
осенней открытой сессии XX Всероссийского симпозиума
по прикладной и промышленной математике**

<i>Анашкин А. В.</i> Об оценках некоторых численных характеристик композиции биективных отображений.	137
<i>Анашкин А. В.</i> Об числе классов CCZ эквивалентных подстановок на V_4	138
<i>Арутюнов Е. Н., Горшенин А. К., Кудрявцев А. А., Титова А. И.</i> Распределения типа Вейбулла и Накагами в байесовских моделях баланса	139
<i>Астафьев В. И., Ротерс П. В., Касаткин А. Е.</i> Функции Вейерштрасса в задачах подземной гидромеханики	140
<i>Боготенкова И. П., Григорович Т. В.</i> Математическое моделирование и оптимизация стратегий на рынке производных финансовых инструментов	140
<i>Брюквина О. Ю., Ветошкин А. М., Корольков А. В., Сапожников В. Б.</i> Падение капли воды на поверхность жидкого азота	141
<i>Виноградов О. П.</i> Математическое образование в средней школе.	145
<i>Вьюненко Л. Ф., Гадасина Л. В.</i> Анализ экономических данных с использованием методов машинного обучения.	145
<i>Горелов Ю. Н., Данилов С. Б., Курганская Л. В., Щербак А. В.</i> Моделирование теплового состояния научной аппаратуры для автоматических космических аппаратов	147
<i>Горелов Ю. Н., Данилов С. Б., Курганская Л. В., Щербак А. В.</i> Об основных результатах космического эксперимента МРТ на космическом аппарате «Фотон-М» № 4.	149
<i>Горелова Н. Ю., Горелова О. И., Сигаев С. В.</i> Об организационно-экономических особенностях обеспечения запуска космических аппаратов на Байконурском филиале АО «РКЦ «Прогресс»»	150
<i>Горшенин А. К.</i> О выявлении смешанного нормального сигнала на фоне смешанного гауссовского шума	152
<i>Грецов А. В., Максименко Л. В.</i> Приближение функций на основе преобразования интерполяционного полинома Лагранжа	154
<i>Гуртов В. А., Симакова А. В.</i> Механизмы управления трудовой мобильностью выпускников с ориентацией на арктические и дальневосточные регионы	155
<i>Гуртов В. А., Щеголева Л. В.</i> Математические модели для количественных оценок численности кадров высшей научной квалификации.	156
<i>Едемский В. А.</i> О линейной сложности бинарных последовательностей, определяемых характерами конечных полей.	157
<i>Елизарова М. И., Соколов Н. А., Хрусталева Е. Ю.</i> Логико-лингвистическая модель ракетно-космической деятельности	158
<i>Еремина Н. Л., Краковецкая И. В., Лопухин Я. Н.</i> Подходы к оценке и управлению конкурентоспособностью студентов университетов	160
<i>Журавлёв А. В.</i> Анализ диэлектрических спектров воды в широком диапазоне частот.	161
<i>Зазаров В. Н., Шанин И. А., Ступников С. А.</i> Применение математических методов обнаружения аномалий для анализа временных рядов, порождаемых элементами жилищной инфраструктуры	163
<i>Казачек Н. Е.</i> Стохастический резонанс (по страницам журналов).	163

<i>Калинкин А. В., Кудряшев С. С.</i> Марковский процесс эпидемии SIRS $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_2$; $T_2 \rightarrow T_1, T_3$; $T_3 \rightarrow T_1$	164
<i>Королева Ю. О., Королев А. В.</i> Системы Кессона и Хершела–Бакли.	166
<i>Кудрявцев А. А., Кузьмин В. Ю., Палионная С. И., Шоргин С. Я.</i> Программный комплекс анализа априорных обобщенных распределений Фреше	167
<i>Кузьмин В. Ю.</i> Сравнение многослойного перцептрона и LSTM сетей для прогнозирования моментов вероятностных распределений	168
<i>Кутырёва Е. В.</i> К вопросу о параметрах одного алгоритма итерационного декодирования.	169
<i>Максимов В. М.</i> Памяти В. О. Вискова — одного из создателей некоммукативного анализа	170
<i>Насибуллаева Э. Ш.</i> Исследование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии	171
<i>Насибуллаева Э. Ш., Насибуллаев И. Ш., Налобина Е. А.</i> Управление течением жидкости в микроканале с помощью пьезоэлемента	173
<i>Окунь Н. А., Соколов Н. А., Хрусталева О. Е.</i> Оценка динамики показателей риска в процессе выполнения инновационного проекта.	174
<i>Осипов Г. С., Осипова Е. В.</i> О решении обратных задач с нечеткими соответствиями	177
<i>Павлов Ю. Л.</i> Кластерная структура конфигурационных графов.	178
<i>Ромм Я. Е., Березовой А. В.</i> Преобразование интерполяционного полинома Лагранжа для компьютерного вычисления интеграла	179
<i>Талис А. Л., Рабинович А. Л.</i> Некристаллографическая симметрия тетраблочных спиралей	180
<i>Талис А. Л., Рабинович А. Л.</i> Расслоение Хопфа для 4-мерного многогранника $\{240\}$ и линейные тетракоординированные цепи.	182
<i>Трусова Ю. О., Мурашов Д. М., Белоозеров В. Н.</i> Онтологическая поддержка анализа изображений произведений живописи	184
<i>Чеплюкова И. А.</i> О максимальной степени вершины в конфигурационном графе с ограниченным числом ребер	185
<i>Якымив А. Л.</i> Объем наибольшей компоненты случайного A -отображения.	186

XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

А. В. Анашкин (Москва, Лаб. ТВП). **Об оценках некоторых численных характеристик композиции биективных отображений.**

В ряде работ [1–5] излагаются способы оценивания характеристик преобразования H векторного пространства V_n , реализуемого композицией биективных отображений. Суть этих способов обычно сводится к следующему. Получают оценку или точное значение требуемой характеристики для одного или произведения небольшого числа отображений (как правило, 1–2), а затем интерполируют результат на всё преобразование. Интерполяция состоит в перемножении значений характеристики для каждого отображения (или произведения нескольких отображений), а если отображения однотипы, то, соответственно, в возведении в степень. Полученное «малое» значение характеристики представляется в качестве «доказательства» «хороших свойств» результирующего преобразования.

Каких-либо обоснований близости точного значения рассматриваемой характеристики и получаемой «оценки» авторами работ не приводится.

Между тем, преобразование H является взаимно однозначным и, значит, найдется такое натуральное t , что $H^t = E$ — тождественное отображение, для которого множество значения упоминаемых характеристик состоит всего из двух элементов — 0 или 1.

Задача нахождения минимального значения величины t , порядка подстановки H в группе S_{V_n} , для преобразований из некоторых заданных классов, представляет самостоятельный интерес. Известно, что t делит порядок группы $|S_{V_n}| = (2^n)!$, но последняя величина достаточно большая. В то же время даже для сложно устроенных преобразований их порядок может иметь и минимальное нетривиальное значение, равное 2 [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирухин В. А.* Верхние оценки на вероятность дифференциалов в двухраундовых LSX-шифрах. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2018, т. 25, в. 4, с. 370–371.
2. *Matsui M.* Linear cryptanalysis method for DES cipher. — In: Advances in Cryptology – EUROCRYPT’93 (Lofthus, May 23–27, 1993.) Proceedings. / Ed. by T. Helleseht. Heidelberg etc.: Springer, 1994, p. 386–397. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 765.)
3. *Ohta K., Moriai S., Aoki K.* Improving the search algorithm for the best linear expression. — In: Advances in Cryptology – CRYPTO’95 (Santa Barbara, August 27–31.) Proceedings. / Ed. by D. Coppersmith. Heidelberg etc.: Springer, 1995, p. 157–170. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 963.)
4. *Wang M. Q., Wang X. Y., Hu C. H.* New linear cryptanalytic results of reduced-round of CAST-128 and CAST-256. — In: Selected Areas in Cryptography. SAC 2008. / Ed. by D. Coppersmith, R. M. Avanzi, L. Keliher, F. Sica. Heidelberg etc.: Springer, 2009, p. 429–441. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 5381.)
5. *Daemen J., Rijmen V.* The Design of Rijndael. Heidelberg etc.: Springer, 2002, xviii+238 p. — Русск. перев.: *Дамен Й., Рэмен В.* Разработка Rijndael: AES — перспективный стандарт. шифрования. Пер. с англ. И. В. Харламова. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2016–2017, т. 23, в. 2– т. 24, в. 1 (журн. ред.).
6. *Biham E., Dunkelman O., Keller N.* Improved Slide Attacks. — In: Fast Software Encryption. 14th International Workshop. FSE 2007. (Luxembourg, March 26–28, 2007.) / Ed. by A. Biryukov. Heidelberg etc.: Springer, 2007, p. 153–166. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 4593.)

А. В. Анашкин (Москва, Лаб. ТВП). **О числе классов CCZ эквивалентных подстановок на V_4 .**

Два биективных отображения $F, G : V_n \rightarrow V_n$ будем называть:

а) *линейно эквивалентными* (обозначение $F \stackrel{LE}{\sim} G$), если существуют такие $A, B \in GL(n, 2)$, что

$$G = A^{-1} \cdot F \cdot B$$

(см. [2]);

б) *аффинно эквивалентными* (обозначение $F \stackrel{AE}{\sim} G$), если существуют такие $A_\alpha, B_\beta \in AGL(n, 2)$,

$$G = A_\alpha^{-1} \cdot F \cdot B_\beta$$

(см. [2]);

в) *обобщенно линейно эквивалентными* (обозначение $F \stackrel{GLE}{\sim} G$), если существует такое $C \in GL(2n, 2)$, что

$$\{(x, G(x)) | x \in V_n\} = C(\{(x, F(x)) | x \in V_n\})$$

(см. [3]);

г) *обобщенно аффинно эквивалентными*, или *CCZ эквивалентными* (обозначение $F \stackrel{GAE}{\sim} G$), если существует такое $C_\gamma \in AGL(2n, 2)$, что

$$\{(x, G(x)) | x \in V_n\} = C_\gamma(\{(x, F(x)) | x \in V_n\})$$

(см. [1]);

д) *расширенно аффинно эквивалентными* (обозначение $F \stackrel{EAE}{\sim} G$), если существуют такие $A_\alpha, B_\beta \in AGL(n, 2)$ и линейное отображение $L : V_n \rightarrow V_n$, что

$$G = A_\alpha^{-1} \cdot F \cdot B_\beta + L$$

(см. [1]).

Нетрудно проверяется справедливость следующих импликаций:

$$F \stackrel{LE}{\sim} G \Rightarrow F \stackrel{GLE}{\sim} G$$

и

$$F \stackrel{AE}{\sim} G \Rightarrow F \stackrel{EAE}{\sim} G \Rightarrow F \stackrel{GAE}{\sim} G,$$

в частности, справедлива диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F \stackrel{LE}{\sim} G & \Rightarrow & F \stackrel{AE}{\sim} G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F \stackrel{GLE}{\sim} G & \Rightarrow & F \stackrel{GAE}{\sim} G. \end{array}$$

В [2] указано, что число классов аффинной эквивалентности подстановок на V_4 равно 302. В [4] приведено число классов расширенной аффинной эквивалентности, равное 194. Это же число позже получено и в [5]. Поскольку классы CCZ эквивалентности являются объединением классов (расширенной) аффинной эквивалентности, то для выделения представителей CCZ эквивалентности достаточно проверить, являются ли попарно CCZ эквивалентными представители аффинной (или расширенной аффинной) эквивалентности. Используя известные инварианты CCZ эквивалентности и проведя необходимые вычисления, получаем следующее

Утверждение. Число классов подстановок из S_{V_4} по отношению CCZ эквивалентности составляет 147.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carlet C., Chaplin P., Zinoviev V. Codes, bent functions and permutations suitable for DES-like cryptosystems. — Designs, Codes and Cryptography, 1998, v. 15, is. 2, p. 125–156.
2. Biryukov A., Canniere C. De., Braeken A., Preneel B. A Toolbox for Cryptanalysis: Linear and Affine Equivalence Algorithms. — In: Proc. of Eurocrypt 2003, Heidelberg etc: Springer, 2003, p. 33–50. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 2656.)
3. Breveglieri L., Cherubini A., Macchetti M. On the Generalized Linear Equivalence of Functions Over Finite Fields. — In: Proc. of Asiacrypt 2004, Heidelberg etc: Springer, 2004, p. 79–91. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 3329.)
4. Анашкин А. В. О числе классов EA-эквивалентных подстановок на V_4 . — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2016, т. 23, в. 5, с. 459–460.
5. Brinkmann M. Extended Affine and CCZ Equivalence up to Dimension 4. — <https://eprint.iacr.org/2019/316> – 29.03.2019.

Е. Н. Арутюнов, А. К. Горшенин, А. А. Кудрявцев, А. И. Титова (Москва, ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ). **Распределения типа Вейбулла и Накагами в байесовских моделях баланса**¹⁾.

В условиях постоянного усложнения процессов, лежащих в основе большинства сфер человеческой деятельности, классические методы анализа эффективности теряют свою актуальность. Все чаще в качестве инструментов исследования различных систем используются показатели, рейтинги и индексы, что позволяет значительно экономить необходимые для проведения исследований ресурсы. При построении математических моделей в задачах исследования эффективности естественно разделять факторы, влияющие на систему, на способствующие функционированию целевого объекта (p -факторы) и препятствующие функционированию (n -факторы). В данных условиях для исследования системы наиболее наглядным показателем эффективности ее работы представляется индекс баланса — отношение n -фактора к p -фактору, которое будет стремиться к единице при приближении системы к состоянию баланса и существенно отличаться от единицы в случае непродуктивной деятельности.

В силу стохастичности среды функционирования любой современной системы значения факторов, влияющих на систему, меняются с течением времени, что создает предпосылки для рассмотрения факторов и индексов, зависящих от них, как случайных величин. Вместе с тем законы, которым подчиняются изменения факторов, можно считать неизменными в рамках конкретной модели, так как глобальные изменения окружающей среды происходят довольно редко. Эти предположения обосновывают применимость байесовского метода, в рамках которого происходит рандомизация параметров при помощи известных априорных распределений [1].

В докладе приводятся аналитические представления вероятностных характеристик индекса баланса факторов, имеющих априорные распределения Вейбулла с плотностью

$$w_{p,\alpha}(x) = \frac{p x^{p-1} e^{-(x/\alpha)^p}}{\alpha^p}, \quad x > 0, \quad p > 0, \quad \alpha > 0,$$

и Накагами с плотностью

$$m_{q,\theta}(x) = \frac{2q^q x^{2q-1}}{\theta^q \Gamma(q)} \exp \left\{ -\frac{qx^2}{\theta} \right\}, \quad x > 0, \quad q > 0, \quad \theta > 0.$$

Результаты представлены в терминах гамма-экспоненциальной функции [2]

$$\text{Ge}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Gamma(\alpha k + \beta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad \beta > 0.$$

¹⁾ От Редакции. По решению Оргбюро ВСПИМ данный доклад был включен в научную программу в качестве приглашенного пленарного доклада.

Также в докладе приводятся численные и графические результаты, полученные при помощи специализированного программного комплекса.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 17-07-00577.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудрявцев А. А.* Байесовские модели баланса. — Информатика и ее применения, 2018, т. 12, в. 3, с. 18–27.
2. *Кудрявцев А. А., Титова А. И.* Гамма-экспоненциальная функция в байесовских моделях массового обслуживания. — Информатика и ее применения, 2017, т. 11, в. 4, с. 104–108.

В. И. Астафьев, П. В. Ротерс, А. Е. Касаткин (Самара, СамГТУ). **Функции Вейерштрасса в задачах подземной гидромеханики** ²⁾.

Расширенная версия доклада будет опубликована в одном из следующих выпусков журнала.

И. П. Боготенкова, Т. В. Григорович (Волгоград, ВолГУ). **Математическое моделирование и оптимизация стратегий на рынке производных финансовых инструментов** ³⁾.

Повышение интереса к математическому моделированию финансовых процессов вызвано развитием финансовых рынков, изменением их структуры, возрастанием волатильности в ценах, появлением новых специфических финансовых инструментов. Наиболее важным производным инструментом на финансовых рынках считают опционы. Опцион — это контракт, заключаемый между двумя инвесторами, который дает право в течение оговоренного в условиях опциона срока либо купить, либо продать по фиксированной цене определенное количество или значение конкретного базисного актива [3, 4].

Опционы позволяют инвесторам формировать различные стратегии, за счет одновременной продажи и/или покупки нескольких опционов. Для рассмотрения при моделировании мы выбрали стрэддл и стрэнгл, кроме этого есть возможность купить либо продать данные комбинации. Данные виды сделок представляют собой сочетание опционов колл и пут на одни и те же акции с одной и той же датой истечения контрактов, а также, в зависимости от выбора стратегии, одинаковой или различной ценой исполнения [1, 2]. Данной теме посвящены различные работы в том числе «Использование алгоритма случайного леса в финансах на примере языка R» [4].

Входными данными для расчетов являются список интересующих нас активов, цена страйк колл и пут опционов, соответствующая им стоимость и текущая цена базового актива. Эти данные получаем напрямую с сайта Yahoo Finance, непосредственно по интересующим нас активам при помощи парсинга [6]. Выходными данными являются совокупность доминирующего актива и его стратегии, вероятность прибыльной сделки и список непосредственно самих удачных сделок.

Для автоматизации расчета прибыльности стратегий и их сравнения используется Microsoft Visual Studio с применением средств Windows Forms C#. Расчеты проводились для различных активов и опционов. Программный продукт можно использовать как рекомендательную базу для покупки или продажи активов.

²⁾ От Редакции. По решению Оргкомитета данный доклад был включен в научную программу в качестве приглашенного пленарного доклада.

³⁾ От Редакции. Доклад был прочитан на весенней сессии XX Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике (Кисловодск, 28 мая–4 апреля 2019 г.), но по техническим причинам публикуется в данном выпуске.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Буренин А. Н. Рынок ценных бумаг и производных финансовых инструментов. Учебное пособие. М.: Научно-техническое сообщество им. академика С. И. Вавилова, 2002, 232 с.
2. Джон К. Халл. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. М: Вильямс, 2008, 1024 с.
3. Любу Ю. Д. Методы и алгоритмы финансовой математики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007, 751 с.
4. Полковников А. А., Хан Г. Г. Использование алгоритма случайного леса в финансах на примере языка R. Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2016, с. 329–333.
5. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции. Пер. с англ. М.: Инфра-М, 2003, XXII, 1028 с.
6. Stocks: Gainers: [Электронный ресурс] // Yahoo!Finance. URL: <https://finance.yahoo.com/quote/BBD/options?p=BBD>

О.Ю.Брюквина, А.М.Ветошкин, А.В.Корольков, В.Б.Сапожников (Москва, МФМГТУ им. Н.Э.Баумана, МГТУ им. Н.Э.Баумана). **Падение капли воды на поверхность жидкого азота.**

Криогранулирование — процесс получения замороженных капель жидкости путем погружения их в криогенную среду. Математическое моделирование этого процесса представляет практический интерес для отработки технологий получения моноразмерных сферических гранул с целью использования их в дальнейшем для производства различных хозяйственных материалов [1]. С точки зрения прикладной промышленной математики — это хороший пример использования методов решения классических задач вычислительной математики для решения комплексных технологических проблем в промышленности. Проиллюстрируем это на примере задачи о падении капли воды на поверхность жидкого азота.

Обозначения и данные:

R — радиус капли
 Y — координата вдоль линии контакта
 $h(y)$ — высота канала
 U — скорость движения капли в начальный момент
 x — координата центра капли
 T_f — начальная температура жидкости
 T_0 — температура кристаллизации воды (273.15 K)
 T_n — температура азота
 ρ_{of} — плотность жидкости и льда (1000 кг/м^3)
 ρ_{on} — плотность азота (807 кг/м^3)
 ρ_{op} — плотность пара (4.61 кг/м^3)
 r_- — скрытая теплота кипения (197600 Дж/кг)
 Lam_n — теплопроводность азота (0.115 Вт/м K)
 Lam_p — теплопроводность пара (0.0075 Вт/м K)
 μ_{on} — динамическая вязкость азота (0.00017 н с/м^2)
 c_{pn} — теплоемкость азота (1950 Дж/кг K)
 c_{pp} — теплоемкость пара (1150 Дж/кг K)
 c_{pf} — теплоемкость воды (4220 Дж/кг K)
 c_{pl} — теплоемкость льда (2120 Дж/кг K)
 L_f — скрытая теплота кристаллизации воды (333000 Дж/кг)
 Lam_f — теплопроводность воды (0.57 Вт/м K)
 Lam_l — теплопроводность льда (2.22 Вт/м K)
 g_0 — ускорение свободного падения (9.8 м/с^2)

Вода имеет комнатную температуру, а жидкий азот — температуру, близкую к температуре кипения. При соприкосновении капли с поверхностью жидкого азота возникает эффект Лейденфроста [2], в соответствии с которым между поверхностью капли и поверхностью жидкого азота образуется слой паров азота (зазор), изолирующий каплю от непосредственного контакта с жидким азотом [3]. Поток тепла через слой паров азота определяет интенсивность парообразования и величину давления в изолирующем слое, а также интенсивность замерзания капли в области контакта.

В системе отсчета, связанной с каплей, на неё действует сила тяжести, сила инерции и сила, создаваемая давлением паров азота в изолирующем слое. Первые две силы стремятся погрузить каплю в жидкий азот, а третья сила препятствует этому. В зависимости от соотношений величин этих сил возможны различные динамические процессы взаимодействия капли и объема жидкого азота. Капля может сразу «утонуть» и замерзнуть в объеме жидкого азота. Капля может частично погрузиться в жидкий азот, после чего совершать колебательные движения около некоторого равновесного положения, постепенно погружаясь по мере замерзания. Капля может быть полностью вытолкнута из объема жидкого азота, после чего вновь падать на поверхность, совершая автоколебания до тех пор, пока не остынет в достаточной степени, чтобы окончательно погрузиться в объем жидкого азота.

В настоящей работе представлена математическая модель динамических и тепловых процессов взаимодействия капли воды, падающей на поверхность жидкого азота, с объемом жидкого азота. Были приняты следующие основные допущения:

- Описываемый процесс обладает осевой симметрией.
- Шарообразная форма капли неизменна.

— Пренебрегаем теплообменом капли воды и смесью воздуха с парами азота над поверхностью жидкого азота. На рис. 1 изображена расчетная схема и представлены основные обозначения. Используется цилиндрическая система координат относительно вертикальной оси симметрии, проходящей через центр капли (рис. 1 а). Для капли и зазора между каплей и азотом введена локальная осесимметричная полярная система координат (рис. 1 б).

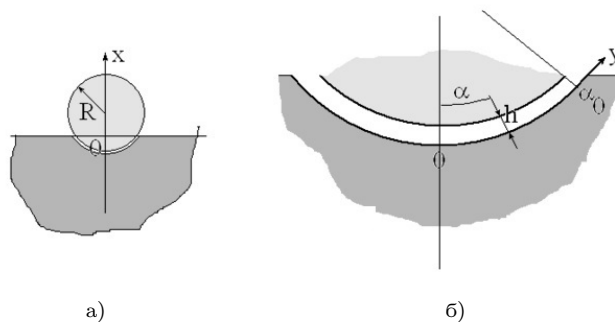


Рис. 1. Расчетная схема

Реализация математической модели предполагает совместное решение ряда классических нестационарных задач тепло- и массопереноса. Модель содержит большое число параметров. Это геометрические размеры, физические свойства воды, жидкого азота и паров азота, начальные состояния системы. Для простой и прозрачной интерпретации результатов реализации модели в вычислительном эксперименте использовались размерные величины (в системе СИ).

В качестве управляющих параметров приняты радиус капли и ее начальное положение — вертикальная координата центра капли.

Марш по времени осуществлялся с заданным шагом, определяемым из условия практической устойчивости в следующем порядке:

• Определяется пятно контакта капли с жидким азотом в данный момент времени.

• Решается задача Стефана в шаре (в капле) при температуре на поверхности, контактирующей с азотом, равной температуре кипения азота за период с предыдущего момента времени до текущего. Решается уравнение нестационарной теплопроводности

$$C(T)\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla(\lambda(T)\nabla T) = Q(T)$$

с учетом изменения удельной теплоемкости и коэффициента теплопроводности при замерзании воды.

• Определяется распределение потока тепла от капли воды к азоту, исходя из поля температур в шаре. Распределение потока тепла пересчитывается в распределение потока пара азота в зазоре.

• Определяется распределение скоростей и давлений в одномерном осесимметричном сферическом канале (зазоре), решая систему одномерных уравнений Навье-Стокса (уравнение переноса импульса и уравнение неразрывности)

$$\begin{cases} u \frac{du}{dy} = \frac{1}{ro_p} \frac{dP}{dy} \\ \frac{d(uS)}{dy} = \frac{q(y)}{r-ro_p} 2\pi R \sin\left(\frac{y}{R}\right) \end{cases}, \quad (1)$$

где $S = 2\pi R \sin(y/R)h$ — площадь сечения канала по координате y .

При формировании системы уравнений использованы следующие допущения:

— Толщина зазора постоянна по угловой координате α (рис. 1 б).

— Давление на выходе из канала равно давлению окружающей среды.

Для решения этой системы вместо $q(y)$ использовано среднее значение потока тепла через поверхность контакта капли с жидким азотом. Благодаря этому удается оценить текущую толщину зазора h , и система (1) легко интегрируется. В результате из (1) получены распределения скоростей и давления

$$u(y) = \frac{qR}{r-ro_p, h} \frac{(1 - \cos(y/R))}{\sin(y/R)}$$

$$P(y) = \frac{ro_p}{2} \left(\frac{qR}{r-ro_p, h} \right)^2 \left(\left(\frac{1 - \cos(y_0/R)}{\sin(y_0/R)} \right)^2 - \left(\frac{1 - \cos(y/R)}{\sin(y/R)} \right)^2 \right).$$

• Вычисляется интегрированием распределения давления по поверхности контакта капли сила, действующая вертикально вверх.

$$F = \int_0^{y_0} P(y) 2\pi R \sin\left(\frac{y}{R}\right) dy = \pi R^2 ro_p \left(\frac{qR}{r-ro_p, h} \right)^2 [I_1 - I_2],$$

где

$$I_1 = \left(\frac{1 - \cos(y_0/R)}{\sin(y_0/R)} \right)^2 (1 - \cos(y_0/R)), \quad I_2 = -2 \left(\ln \left(\cos \frac{y_0}{R} \right) + 1 \right) - \ln(2) + \cos \left(\frac{y_0}{R} \right) - 1.$$

Вес капли $F_p = V ro_f, g_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 ro_f g_0$.

Сила плавучести $F_g = \frac{1}{3} H^2 (3R - H) (ro_f - ro_n) g_0$

Здесь H — высота шарового сегмента $H = R(1 - \cos(y_0/R))$

Новое ускорение

$$A = \frac{F_p - F_g - F}{V ro_f}$$

Новое положение капли и новая скорость.

$$x = x + U d\tau, \quad U = U + A d\tau$$

Расчеты проводились для начальных данных, представленных в таблице (радиус капли в м, относительная высота центра капли над поверхностью в радиусах капли).

Таблица

Вариант	00050_1	00100_1	00100_2	00150_1	00200_1	00200_2
Радиус	0.0005	0.001	0.001	0.0015	0.002	0.002
Высота	1	1	2	1	1	2

На рис. 2 представлены изменения координат центра капли во времени при различных начальных значениях.

На основании представленных результатов можно сделать вывод, что частота колебаний капли зависит от ее размера (чем меньше радиус капли, тем частота ниже), а амплитуда тем больше, чем больше скорость падения капли на поверхность жидкого азота.

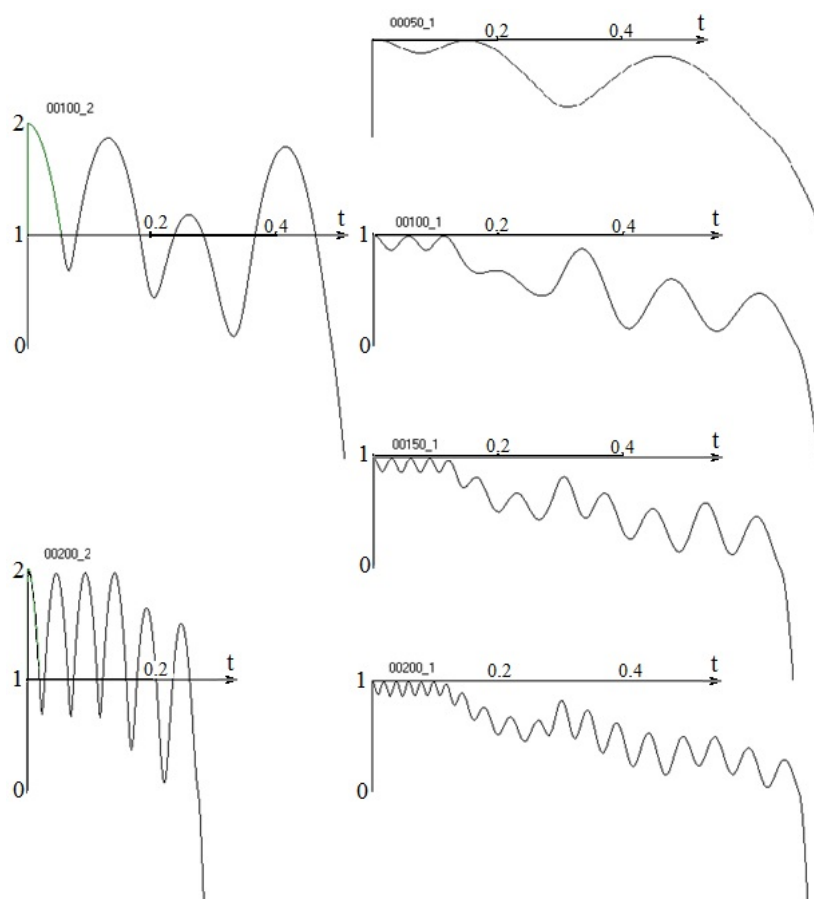


Рис. 2. Изменения координат центра капли во времени при различных начальных значениях (время в секундах, координата центра капли отнесена к радиусу капли, нулевое значение координаты соответствует поверхности жидкого азота)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белуков С. В., Ермолаева П. Ю., Сапожников В. Б. Разработка рекомендаций по рациональным режимным параметрам процесса замораживания гранул жидких суспензий с применением азотных температур. — Холодильная техника, 2017, № 8, с. 41–45. (0,663 п.л./0,31 п.л.).
2. Лейденфрост И. Г. Трактат о некоторых свойствах обыкновенной воды = Johann Gottlob Leidenfrost. De aquae communis nonnullis qualitatibus. Duisburg, 1756.
3. Belukov S. V., Kimens P. Yu., Korolkov A. B., Sapozhnikov V. B. On the time length of small-sized water droplets' freezing in a liquid nitrogen medium in the process of cryogranulation. Abstracts book. IV International conference for young scientist "Low Temperature Physics" 3–7 June 2013. B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering The National Academy of Sciences of Ukraine, 2013, p. 129. (0,06 h.h./0,03 p.p.).

О. В. Виноградов (Москва, Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова).
Математическое образование в средней школе.

Л. Ф. Вьюненко, Л. В. Гадасина (Санкт-Петербург, СПбГУ). **Анализ экономических данных с использованием методов машинного обучения**⁴⁾.

Развитие страны в целом определяется развитием ее субъектов как территориальных единиц верхнего уровня. Анализ показателей развития субъектов позволяет исследовать возможности и проблемы государства. В настоящей работе используются методы машинного обучения для анализа данных об экономическом и инновационном развитии регионов Российской Федерации, полученных из открытых источников. Предлагаемый подход состоит в последовательном использовании нескольких методов машинного обучения. На первом этапе субъекты РФ разбиваются на отличающиеся друг от друга группы со схожими признаками. Затем номера групп регионов используются в качестве выходных переменных, для предсказания которых строятся классификаторы. На заключительном этапе выявляются признаки, наиболее важные с точки зрения влияния на формирование групп регионов. В качестве исходных данных рассматривались следующие показатели развития регионов, публикуемые Федеральной службой государственной статистики:

- экономические показатели регионов — оплата труда, приобретение оборудования предприятиями, текущие затраты, количество предприятий, средняя численность работников, оборот предприятий (объем товаров собственного производства и объем выполненных работ и услуг собственными силами), инвестиции в основной капитал, доходы от предпринимательской деятельности;
- показатели инновационного развития регионов — затраты на технологические инновации, исследование и разработка новых продуктов, услуг и методов для их продукции (денежные затраты), покупка машин и оборудования, связанных с технологическими инновациями (СТИ), приобретение новых технологий, приобретение прав на патенты и лицензии на использование изобретений, приобретение программного обеспечения, обучение и подготовка персонала, связанного с инновациями, маркетинговые исследования, используемые передовые производственные технологии, дизайн (деятельность по изменению формы, внешнего вида или удобства использования продуктов или услуг), инжиниринг производственных процессов.

⁴⁾ От Редакции. По решению Оргкомитета данный доклад был включен в научную программу в качестве приглашенного пленарного доклада.

Для выделения групп регионов использовался иерархический кластерный анализ с евклидовой метрикой вычисления расстояния между объектами и методом Варда для формирования кластеров. Классификация проводилась методом «случайный лес», позволяющим не только получить хорошие значения метрик качества классификации, но и выявлять показатели, определяющие различие классов (в данном случае групп регионов).

На рис. 1 и 2 представлены диаграммы относительной значимости анализируемых показателей экономического и инновационного развития для формирования групп регионов.

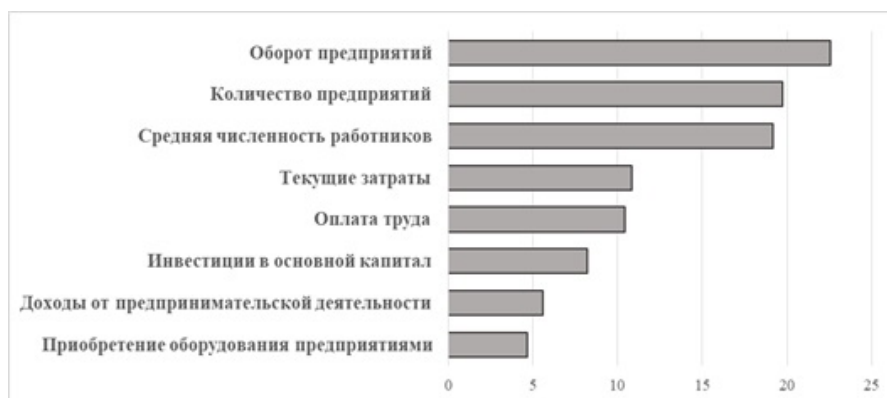


Рис. 1. Относительная значимость показателей экономического развития для формирования групп регионов.

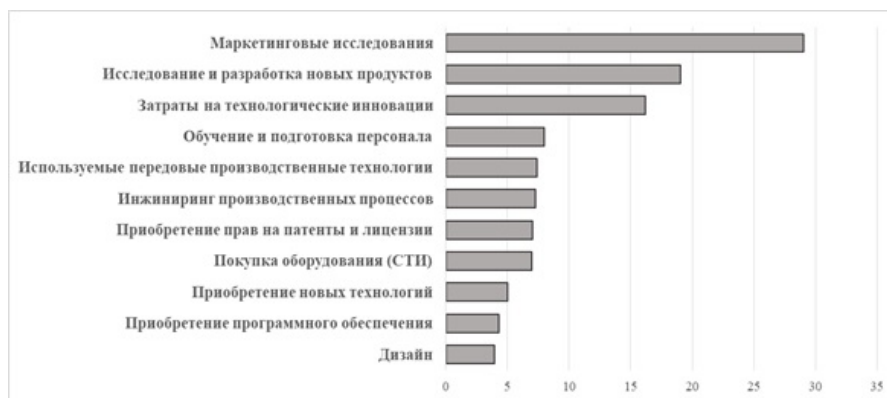


Рис. 2. Относительная значимость показателей инновационного развития для формирования групп регионов.

Предлагаемый подход позволяет выявить общие и специфические характеристики регионов. С точки зрения экономических показателей кластеры образуются главным образом на основе оборота предприятий, их количества и средней численности работников. При этом остальные факторы также оказывают влияние на формирование кластеров. Для инновационных показателей, например, такой фактор, как дизайн, не является кластерообразующим в настоящее время, что, по-видимому, объясняется недостаточным вниманием к нему со стороны многих предприятий.

Ю. Н. Горелов, С. Б. Данилов, Л. В. Курганская, А. В. Шербак (Самара, Самарский национальный исследовательский ун-т им. академика С. П. Королёва). **Моделирование теплового состояния научной аппаратуры для автоматических космических аппаратов.**

Изучение влияния факторов космического полета на технологические, физико-химические и биологические процессы непосредственно связано с применением научной аппаратуры (НА) для проведения соответствующих космических экспериментов (КЭ) [1–3].

Разработка такой НА носит уникальный характер из-за необходимости выполнения определенных требований к ее функционированию на борту автоматических космических аппаратов (КА) в течение всего полета [4], включая участки выведения на орбиту и возвращения спускаемого аппарата (СА) на Землю. Включение НА в состав КА и ее взаимодействие с его служебными системами требует обеспечения выполнения условий функциональной и структурной автономности НА, которые обусловлены особенностями проведения КЭ. Автономность НА определяется характером и степенью ее интеграции с бортовыми системами и с конструкцией КА, а именно, реализацией соответствующих интерфейсов: механического, электрического, информационно-управляющего и т. п., что связано в первую очередь со структурной автономностью НА. Функциональная автономность НА определяется расходами ресурсов бортовых систем КА, которые необходимы для обеспечения ее нормального функционирования. Поэтому оценить степень функционально-структурной автономности НА можно как количеством затрачиваемых на ее функционирование ресурсов бортовых систем КА, так и характером функциональных взаимосвязей НА и КА.

В связи с этим одной из наиболее сложных задач в части оптимизации степени функционально-структурной автономности, решаемых при проектировании КА и при разработке НА, является обеспечение требуемого теплового состояния конструкции КА и устанавливаемой в него НА [4]. Результаты эскизного проектирования НА СИГМА-2 для КА «Бион-М» № 2 [3] также показали, что в силу предъявленных требований к этой НА и особенностей планируемых для нее КЭ задача управления тепловым состоянием аппаратуры в течение всего полета КА является актуальной из-за необходимости использования бортового электропитания.

В состав НА СИГМА-2 входят отдельные блоки, объединенные линиями электропитания и передачи команд управления и измерительной информации. Каждый блок предназначен для проведения отдельных групп КЭ [3], которые требуют различных температурных режимов контейнеров с биообъектами. В свою очередь, в блоках НА имеются секции, в которых эти режимы могут существенно различаться.

В докладе, представленном данным сообщением, рассматривается расчетная схема для формирования модели управления тепловым состоянием одного из блоков НА СИГМА-2, состоящего из двух секций. В первой секции этого блока НА располагается модуль термостабилизированных контейнеров с биообъектами, а во второй секции — емкость с запасом ростовой среды, а также емкость для сброса отработанной ростовой средой. Ростковая среда предназначена для проведения КЭ МУЛЬТИИНКУБАТОР (постановщики КЭ — Самарский государственный медицинский университет и медицинский центр «Династия» (Самара) [3]). Кроме того, в этом же блоке НА предполагается проведение КЭ ТРАНСКРИПТОМ-МСК (постановщик КЭ — ИМБП РАН [3]). Температура элементов конструкции в первой секции блока НА должна быть равна $T_1^* = 310K$, что соответствует требованиям проводимых КЭ, а во второй секции для емкости с запасом ростовой среды — $T_2^* = 280 \dots 285K$, что необходимо для обеспечения сохранности как запасов, так и отработанной среды в течение полета КА (до 35 суток). Внутри спускаемого аппарата КА температура газовой среды (воздуха) равна T_{CA} и при этом выполняются условия нормального функционирования НА: $T_2^* < T_{CA} < T_1^*$.

В условиях космического полета естественная конвекция отсутствует, поэтому теплообмен между газовой средой, элементами конструкции и стенками камер секций должен обеспечиваться за счет вынужденной конвекции, осуществляемой посредством вентиляции внутри камер каждой из секций блока НА. Кроме того, внутри камер секций блока НА между его элементами конструкции также имеет место лучистый теплообмен [4]. Регулирование тепловых потоков внутри секций осуществляется с помощью элементов Пельтье и омических нагревателей суть исполнительных органов системы терморегулирования рассматриваемого блока НА. Основная особенность моделирования теплового состояния НА связана с тем, что она является системой с распределенными параметрами, состояние которой описывается системами дифференциальных уравнений в частных производных [5, 6]. Поэтому здесь рассматривается подход к построению конечномерной модели системы терморегулирования блока НА, которая основана на доступной измерительной информации — текущих температурах элементов конструкции и газовых сред. Она формируется исходя из оценок текущих балансов тепловых потоков между функциональными и вспомогательными элементами конструкции внутри каждой секции блока, с одной стороны, и, с другой стороны, между блоком НА и элементами конструкции внутреннего объема СА. При этом для описания теплового состояния стенок необходимо применить дискретизацию уравнения теплопроводности [5] (вводя в рассмотрение согласно методу сеток температуры сечений по толщине стенок [7]). Получаемая таким образом модель теплового состояния НА отличается тем, что она будет содержать в правых частях не только линейные по температурам члены, обусловленные теплообменом между элементами конструкции и газовыми средами в камерах секций (согласно закону Ньютона–Рихмана [5, 6]), но и нелинейные члены, которые описывают процессы лучистого теплообмена (согласно законам Стефана–Больцмана, Кирхгофа и др. [4, 6]). Переменные состояния — T_k , $k = 1, 2, 3, \dots$, в полученной модели можно нормировать так: $\tau_k = (T_k - T_0^*)/T_0^*$, где $T_0^* = (T_1^* + T_2^*)/2$. Тогда с учетом значений T_1^* и T_2^* в разложении множителей $(1 + \tau_k)^4 = 1 + 4\tau_k + \dots$ степени выше первой можно отбросить, так как $4\tau_k \leq 0,05$. То есть полученная модель будет линейной по нормированным переменным состояния, но при этом будет содержать квадратичные члены относительно управляющих параметров суть токов в элементах Пельтье и омических нагревателей блока НА. Последнее потребует модификации процедуры определения управляемости, но исключает релейные оптимальные управления такой системой. Кроме того, в значительной степени облегчается процедура идентификации экспериментальным путем параметров системы терморегулирования НА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев В. Н., Ильин Е. А., Ярманова Е. Н. и др. Проект «Бион-М1»: общая характеристика проекта. — В кн. Космический научный проект «Бион-М1»: медико-биологические эксперименты и исследования. / Под ред. А. И. Григорьева. М.: ГНЦ РФ – ИМБП РАН, 2016, с. 58–69.
2. Курганская Л. В. Космический эксперимент с научной аппаратурой «МРТ» на КА «Фотон-М» № 4. — Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия, 2014, № 10 (121), с. 140–152.
3. Горелов Ю. Н., Курганская Л. В., Щербак А. В. Научная аппаратура КАРБОН, МРТ и СИГМА для проведения космических экспериментов на борту космических аппаратов «Бион-М» № 1 и «Фотон-М» № 4. — Известия СамНЦ РАН, 2016, т. 18, № 4(6), с. 1039–1047.
4. Андреев В. В., Черенков В. Б. Атманов И. Т. и др. Автоматические планетные станции. / Отв. ред. Ю. К. Ходарев; АН СССР. Ин-т косм. исследований. М.: Наука, 1973, 280 с.

5. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969, 288 с.
6. Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. М.: Энергия, 1977, 344 с.
7. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. Т. II. М.: Наука, 1977, 400 с.

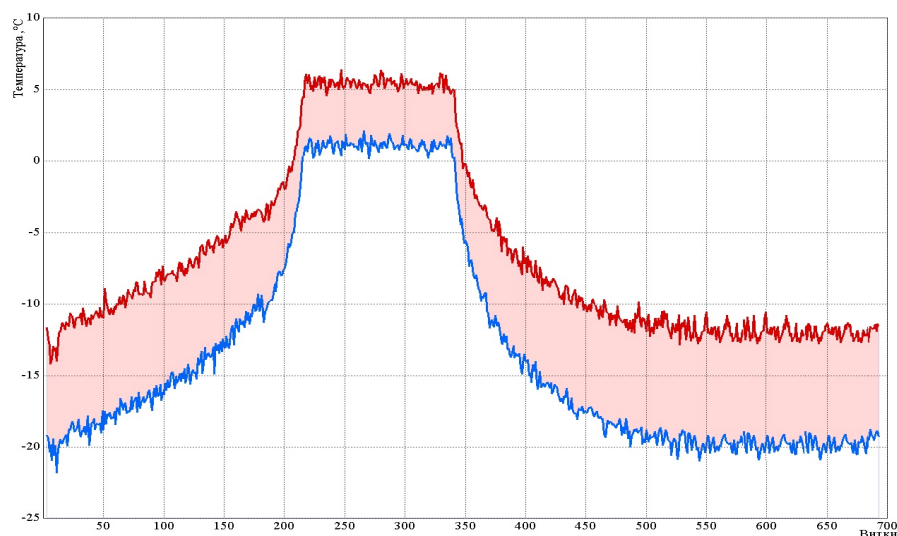
Ю. Н. Горелов, С. Б. Данилов, Л. В. Курганская, А. В. Щербак (Самара, Самарский национальный исследовательский ун-т им. академика С. П. Королёва). **Об основных результатах космического эксперимента МРТ на космическом аппарате «Фотон-М» № 4.**

В июле 2014 года с космодрома Байконур был запущен на орбиту научный КА «Фотон-М» № 4, который являлся модернизацией КА «Бион-М» № 1 [1]. В программу научных исследований КА «Фотон-М» № 4 был включен космический эксперимент с аппаратурой МРТ (многоканальный регистратор температур [2, 3]), которая предназначалась для измерения температур на всех этапах эксплуатации КА в контейнерах научной аппаратуры (КНА) на поверхности спускаемого аппарата, т. е. в условиях открытого космического пространства. В настоящем сообщении приведены основные результаты одноименного эксперимента МРТ, полученные в полете КА «Фотон-М» № 4. Цель эксперимента МРТ — мониторинг теплового состояния КНА на этапах подготовки к пуску, в течение орбитального полета КА, а также на участке спуска с орбиты. Конструкция аппаратуры МРТ описана в [3].

Для интерпретации полученных данных о температурах конструкции КНА необходимо отметить, что практически в течение всего полета КА «Фотон-М» № 4 поддерживался режим нормальной ориентации, когда панели солнечных батарей были направлены на Солнце, а КНА находились на затененной поверхности спускаемого аппарата. Текущие температуры датчиков в МРТ (в каждом из трех КНА было установлено по семь датчиков [2]) регистрировались с дискретностью 10 сек как в течение полета КА (с 19 июля по 1 сентября), так и за трое суток до его запуска на орбиту и спустя в течение семи суток после посадки и доставки спускаемого аппарата на завод-изготовитель КА - РКЦ «Прогресс».

Полученные данные эксперимента МРТ показали, что можно выделить три характерных участка изменения температур конструкции КНА: 1) участок от момента старта КА до конца 2...3-го витков; 2) участок орбитального полета, начиная с 3...4-го витка до начала 694-го (спускового) витка; 3) участок спуска с орбиты и до приземления [2]. На орбитальном участке, начиная с 4-го и до 694-го витка, наблюдались гармонические внутривитковые колебания значений температур с практически одинаковыми амплитудами для всех датчиков МРТ. Но с течением времени средние значения температур возрастали и достигали положительных значений на интервале между 200-м и 350-м витками, что было обусловлено изменением за счет прецессии положения плоскости орбиты КА относительно Солнца. При этом в диапазоне витков от 220 до 340 КА «Фотон-М» № 4 не заходил в тень Земли. На рисунке показаны зависимости для максимальных диапазонов внутривитковых изменений температур, которые наблюдались в течение всего полета КА в одном из КНА. В остальных КНА они аналогичны [2, 3].

Результаты эксперимента МРТ на КА «Фотон-М» № 4 нашли практическое применение при формировании научной программы для КА «Бион-М» № 2 [3], а именно, в перечень научной аппаратуры включена модернизированная аппаратура МРТ, которая предназначена для контроля теплового состояния конструкции 4-х КНА и последующей интерпретации условий проведения в них ряда космических экспериментов, в том числе на более высоких орбитах полета КА (около 800 км).



Анализ полученных данных эксперимента МРТ показал, что существенное влияние на тепловой режим КНА оказывает светотеневая обстановка на витках, которая определяется текущим отклонением нормали плоскости орбиты КА от направления на Солнце. Временные ряды данных о значениях текущих температур носят ярко выраженный колебательный (гармонический) характер с орбитальным периодом движения КА и с высоким уровнем корреляции между ними, а также зависимостью средневитковых значений температур от положения плоскости орбиты КА относительно Солнца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирилин А. Н., Азметов Р. Н., Стратилатов Н. Р., Абрашкин В. И., Ёлкин К. С. Космические аппараты «Бион» и «Бион-М»: вчера, сегодня, завтра. — В кн. Космический научный проект «Бион-М1»: медико-биологические эксперименты и исследования. / Под ред. А. И. Григорьева. М.: ГНЦ РФ - ИМБП РАН, 2016, с. 9–16.
2. Курганская Л. В. Космический эксперимент с научной аппаратурой «МРТ» на КА «Фотон-М» № 4. — Вестник Самарского государственного ун-та. Естественная серия, 2014, № 10 (121), с. 140–152.
3. Горелов Ю. Н., Курганская Л. В., Щербак А. В. Научная аппаратура КАРБОН, МРТ и СИГМА для проведения космических экспериментов на борту космических аппаратов «Бион-М» № 1 и «Фотон-М» № 4. — Известия СамНЦ РАН, 2016, т. 18, № 4(6), С. 1039–1047.

Н. Ю. Горелова, О. И. Горелова, С. В. Сигаев (Самара, Самарский национальный исследовательский ун-т им. академика С. П. Королёва, Байконур, Байконурский филиал АО «РКЦ «Прогресс»). **Об организационно-экономических особенностях обеспечения запуска космических аппаратов на Байконурском филиале АО «РКЦ «Прогресс»».**

В настоящее время ракетно-космическая отрасль (РКО) Российской Федерации является системой научно-исследовательских, производственных и обслуживающих предприятий и организаций, деятельность которых направлена на создание высокотехнологичного и инновационного оборудования для осуществления ряда космических программ.

Современное состояние РКО определяется рядом факторов, а именно: наличие нескольких пусковых площадок, главные из которых расположены за пределами РФ; отсутствие системного подхода к проведению научных исследований в отрасли; обезличенные направления общей концепции развития РКО; сложности в области международного сотрудничества, связанные с современной геополитической обстановкой; наличие противоречий в области распределения и обеспечения военных, гражданских и туристических пусков ракет космического назначения; коррупционные составляющие при выполнении государственных контрактов.

В настоящее время РФ располагает несколькими площадками, способными осуществлять запуски космических аппаратов, основной из которых является Байконурский филиал АО «РКЦ «Прогресс». В соответствии с Положением [1], запуск космического аппарата (КА) — это совокупность организационно-технических мероприятий, обеспечивающих подготовку ракеты космического назначения к пуску, ее пуск и выведение космического аппарата на расчетную орбиту. Для обеспечения запусков КА различного назначения за Байконурским филиалом АО «РКЦ «Прогресс» закреплены следующие задачи:

1. Организация и проведение работ по подготовке составных частей ракет космического назначения (ракет-носителей, сборочно-защитных блоков, космических аппаратов) к пуску и проведение работ по пуску ракет космического назначения.
2. Организация и проведение работ по техническому обслуживанию оборудования, закрепленного за филиалом (наземного испытательного оборудования, комплектация механо-технологического оборудования и др.)
3. Обеспечение учета и сохранности космических средств, поступающих из АО «РКЦ «Прогресс» и от предприятий-смежников.
4. Содержание эксплуатируемых объектов наземной космической инфраструктуры, закрепленных за филиалом, в готовности к выполнению задач по их функциональному назначению.
5. Обеспечение функционирования и поддержание в рабочем состоянии системы менеджмента качества в процессе подготовки космических аппаратов и ракет-носителей.
6. Организация работы по управлению качеством труда подразделения.

В связи с необходимостью разработки новых подходов к решению перечисленных выше задач с целью повышения эффективности функционирования РКО РФ в настоящем сообщении рассматриваются некоторые подходы к поиску эффективных и своевременных, в конечном счете, оптимальных решений этих задач. Отмечается, что в первую очередь надлежащее решение таких задач непосредственно и тесно связано с необходимостью соответствующей подготовки высококвалифицированного и мотивированного персонала РКО, а современные методы поиска и отбора претендентов не всегда способны обеспечить формирование коллектива, полностью отвечающего всем квалификационным требованиям и задачам филиала. В свою очередь это приводит, как правило, к переработкам и профессиональному выгоранию уже имеющегося персонала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Положение по организации подготовки и проведения запусков космических аппаратов с космодрома «Байконур» (ППЗ-2001) от 07.03.2001 г.

А. К. Горшенин (Москва, ФИЦ ИУ РАН, ВМК МГУ). **О выявлении смешанного нормального сигнала на фоне смешанного гауссовского шума.**

Предположим, что исходные наблюдения представляют собой реализацию с. в. $Z = X + Y$, где с. в. X соответствует полезному сигналу в данных, а с. в. Y описывает шум измерительного оборудования, обусловленный набором факторов, в том числе случайного характера. При этом с. в. X и Y являются независимыми. Будем считать, что до начала эксперимента есть возможность получить набор наблюдений, являющихся реализацией только с. в. Y . Данная ситуация соответствует случаю, когда при регистрации сигналов в реальном эксперименте за счет его организации возможно заранее получить набор наблюдений, которые описывают только шум, распределение которого существенно отличается стандартного нормального, а параметры неизвестны [1].

Пусть распределение с. в. Y может быть представлено в виде конечной смеси нормальных законов с неизвестными параметрами. Тогда, используя, например, одну из версий ЕМ-алгоритма и метода скользящего разделения смесей [1], можно получить оценки максимального правдоподобия соответствующих параметров и считать данное распределение заданным, т. е.

$$Y \sim \sum_{j=1}^{\tilde{k}} \tilde{p}_j \Phi\left(\frac{x - \tilde{a}_j}{\tilde{\sigma}_j}\right)$$

со стандартными ограничениями на известные (оцененные) параметры. Предположим, что распределение с. в. X также может быть описано конечной смесью нормальных распределений, т. е.

$$X \sim \sum_{j=1}^k p_j \Phi\left(\frac{x - a_j}{\sigma_j}\right) \quad (1)$$

со стандартными ограничениями на неизвестные параметры. Возникает задача восстановления данного распределения с помощью метода скользящего разделения смесей для реализаций с. в. Z , распределение которой, как несложно показать, имеет вид:

$$Z \sim \sum_{l=1}^{k \cdot \tilde{k}} \hat{p}_l \Phi\left(\frac{x - \hat{a}_l}{\hat{\sigma}_l}\right),$$

причем для неизвестных параметров справедливы следующие представления:

$$\hat{p}_{(r-1)\tilde{k}+j} = p_r \tilde{p}_j, \quad \hat{a}_{(r-1)\tilde{k}+j} = a_r + \tilde{a}_j, \quad \hat{\sigma}_{(r-1)\tilde{k}+j}^2 = \sigma_r^2 + \tilde{\sigma}_j^2 \quad (2)$$

сразу для всех индексов $r = \overline{1, k}$ и $j = \overline{1, \tilde{k}}$. Относительно параметров p_r , a_r и σ_r^2 , $r = \overline{1, k}$, система (2) является переопределенной, так как количество уравнений превышает число переменных. Рассмотрим несколько возможных вариантов решения на основе метода наименьших квадратов (МНК) и максимизации логарифмической функции правдоподобия. Введем следующие обозначения ($r = \overline{1, k}$, $\oplus$ — прямая сумма соответствующих матриц [3]):

$$\mathcal{E} = \bigoplus_{r=1}^k \mathbf{1}_{\tilde{k} \times 1}, \quad \tilde{A} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{1}_{\tilde{k} \times 1}, \quad \tilde{\Sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1}_{\tilde{k} \times 1},$$

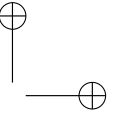
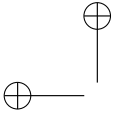
где

$$\tilde{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_{\tilde{k}}), \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1^2, \dots, \sigma_{\tilde{k}}^2),$$

а также

$$\hat{\mathbf{a}}_r = (a_{(r-1)\tilde{k}+1}, \dots, a_{r\tilde{k}}), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_r = (\sigma_{(r-1)\tilde{k}+1}^2, \dots, \sigma_{r\tilde{k}}^2),$$

$$\hat{\mathbf{p}}_r = (\hat{p}_{(r-1)\tilde{k}+1}, \dots, \hat{p}_{r\tilde{k}}), \quad \hat{\mathbf{p}}_r^{-1} = (\hat{p}_1^{-1}, \dots, \hat{p}_{\tilde{k}}^{-1}).$$



Утверждение 1. Оценки параметров неизвестного распределения с. в. X (1) на основе МНК могут быть записаны в следующем виде:

$$\mathbf{p} = \tilde{k}^{-1} [(\tilde{\mathbf{p}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{p}}_2^{-1} \cdots \tilde{\mathbf{p}}_k^{-1}) \circ \hat{\mathbf{p}}] \mathcal{E},$$

$$\mathbf{a} = \tilde{k}^{-1} (\hat{\mathbf{a}} \mathcal{E} - \tilde{A} \mathbf{1}_{1 \times k}),$$

$$\mathbf{\Sigma} = \tilde{k}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{E} - \tilde{\Sigma} \mathbf{1}_{1 \times k}),$$

где

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k), \quad \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k), \quad \mathbf{\Sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k),$$

$$\hat{\mathbf{p}} = (\hat{\mathbf{p}}_1 \cdots \hat{\mathbf{p}}_k), \quad \hat{\mathbf{a}} = (\hat{\mathbf{a}}_1 \cdots \hat{\mathbf{a}}_k), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1 \cdots \hat{\boldsymbol{\sigma}}_k),$$

а символ $\circ$ обозначает произведение Адамара [4].

Теперь рассмотрим подход на основе функции правдоподобия. Введем следующие обозначения ($a_{r,j}$, $\sigma_{r,j}$ и $p_{r,j}$ определяются на основе формул (2), $(Z_1, \dots, Z_n)$ — наблюдаемая выборка, $\varphi(\cdot)$ — плотность стандартного нормального распределения):

$$\boldsymbol{\varphi}_{h,j} = \left(\varphi \left(\frac{Z_h - a_{1,j}}{\sigma_{1,j}} \right), \dots, \varphi \left(\frac{Z_h - a_{k,j}}{\sigma_{k,j}} \right) \right),$$

$$\mathbf{p}_j = (p_{1,j}, \dots, p_{k,j}),$$

$$\mathcal{J}_j = \left(\log (\mathbf{p}_j \boldsymbol{\varphi}_{h,j}^T) \right)_{h=\overline{1,n}}.$$

Утверждение 2. Оценки параметров неизвестного распределения с. в. X (1) на основе максимизации логарифмической функции правдоподобия могут быть записаны в следующем виде для всех $r = \overline{1, k}$:

$$p_r = \hat{p}_{(r-1)\tilde{k}+J} \cdot \tilde{p}_J^{-1},$$

$$a_r = \hat{a}_{(r-1)\tilde{k}+J} - \tilde{a}_J,$$

$$\sigma_r^2 = \hat{\sigma}_{(r-1)\tilde{k}+J}^2 - \tilde{\sigma}_J^2,$$

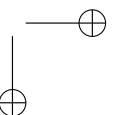
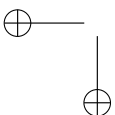
где номер J определяется как решение оптимизационной задачи следующего вида:

$$J = \arg \max_{j=\overline{1,\tilde{k}}} \mathcal{J}_j \mathbf{1}_{n \times 1}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-07-00717).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stein D. W. J. Detection of random signals in Gaussian mixture noise. — IEEE Transactions on Information Theory, 1995, v. 41, is. 6, p. 1788–1801.
2. Королев В. Ю. Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. М.: Изд-во Московского ун-та, 2011, 512 с.
3. Ayres F. J. Schaum's Outline of Theory and Problems of Matrices. New York: McGraw Hill Book Company, 1962.
4. Halmos P. R. Finite-Dimensional Vector Spaces. — Annals of Mathematics Studies. Number 7. Princeton: Princeton University Press, 1948.



А. В. Грецов, Л. В. Максименко (Таганрог, Таганрогский институт им. А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ)). **Приближение функций на основе преобразования интерполяционного полинома Лагранжа.**

Вычисление функций с минимизацией временной сложности и с высокой точностью приближения актуально для многих практических приложений вычислительной математики. Ниже излагаются результаты численного эксперимента по быстродействующему вычислению функций с высокой точностью на основе преобразования интерполяционного полинома Лагранжа, вычисления достигают границ абсолютной погрешности порядка в сравнительно общих условиях. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, где требуется выполнить ее приближение. Отрезок разбивается на подынтервалы равной, достаточно малой длины:

$$[a, b] = \bigcup_{i=0}^{p-1} [a_i, b_i], \quad b_i - a_i = \frac{b-a}{P}.$$

Интерполяция выполняется на каждом подынтервале, малость которого обеспечивает снижение погрешности. При каждом i на $[a_i, b_i]$ задаются $n+1$ узлов интерполяции x_{ji} , $j \in \overline{0, n}$, $x_{0,i} = a_i$, $x_{n,i} = b_i$. Интерполяционный полином Лагранжа примет вид

$$\Psi_{ni}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_{ji}) \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n (x - x_{ri}) / \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n (x_{ji} - x_{ri}).$$

Используя видоизменение формул Виета [1], можно полином

$$\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n (x - x_{ri})$$

привести к виду алгебраического полинома с числовыми коэффициентами, на этой основе автоматизируется приведение подобных во всем выражении. В результате $\Psi_{ni}(x)$ примет вид искомого алгебраического полинома. Далее, можно по стандартной программе [2] можно минимизировать степень полинома при сохранении заданной границы погрешности за счет соответственного уменьшения длины подынтервала. В таком варианте удастся достигать точности приближения порядка 10^{-12} для любой элементарной функции [2]. Точность можно существенно повысить, если

$$\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n (x - x_{ri}) / \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n (x_{ji} - x_{ri}).$$

привести к виду алгебраического полинома с целыми коэффициентами:

$$\prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n \frac{x - x_r}{(j-r)h} = \prod_{\substack{r=0 \\ r \neq j}}^n \frac{t-r}{(j-r)} = \prod_{r=0}^{j-1} \frac{t-r}{(j-r)} \times \prod_{r=j+1}^n \frac{t-r}{(j-r)}, \quad t = \frac{x - x_0}{h},$$

и весь полином Лагранжа применять в виде

$$\Psi_{ni}(x) = \sum_{j=0}^n f(x_{ji}) \frac{(-1)^{n-j-1}}{j!(n-j)!} (d_{0j} + d_{1j}t + d_{2j}t^2 + \dots + d_{nj}t^n), \quad t = \frac{x - x_{0i}}{h},$$

где d_{2j} — целые числовые коэффициенты. Преобразование (2) получается из того, что Ниже приводятся наиболее характерные результаты численного эксперимента по приближению функции непосредственно в форме (2).

Вычисление $y = \exp(1/3^* \sin(abs(1/x)))$ на промежутке $[1/10 \dots 1/10 + 0.000001](n=2)$:

Значение x	-3.99E+0005	...	-3.99E+0005	...	-3.99E+0005
Погрешность	0	...	-5.93E-0021	...	-1.18E-0018

Приведенные примеры характерны для всего численного эксперимента на основе кусочной интерполяции. Таким образом, предложенное преобразование интерполяционного полинома Лагранжа позволяет достигать высокой точности приближения функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ромм Я.Е. Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II. — Кибернетика и системный анализ, 2007, № 2, с. 161–174.
2. Ромм Я.Е., Фурсова С.А. Минимизация временной сложности вычисления функций с приложением к цифровой обработке сигналов. — Изд-во ТГПИ. Таганрог, 2008, 124 с.

В. А. Гуртов, А. В. Симакова (Петрозаводск, ПетрГУ). Механизмы управления трудовой мобильностью выпускников с ориентацией на арктические и дальневосточные регионы.

Управление трудовой мобильностью выпускников российских регионов с ориентацией на арктические и дальневосточные территории является важным звеном системы стратегического кадрового обеспечения этих регионов в условиях сложившегося и прогнозируемого кадрового дефицита. Ежегодно в компаниях Арктики (АЗ) и Дальнего Востока (ДВ) трудоустраивается порядка 25 тысяч выпускников вузов и 3 тысяч выпускников колледжей [1] (см. рис. на примере Дальнего Востока).

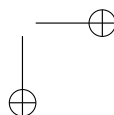


Рис. Объем миграционных потоков выпускников вузов из российских регионов в дальневосточные регионы

При этом данная положительная тенденция нивелируется оттоком выпускников АЗ и ДВ в регионы центральной части России — ежегодно уезжает примерно 20 тысяч местных выпускников.

В докладе представлен подход управления миграционными потоками выпускников вузов и колледжей через формирование мотивационных установок у молодежи на работу и жизнь в регионах АЗ и ДВ, а также на создание позитивного имиджа этих регионов в молодежной среде. Одним из механизмов формирования мотивационных установок молодежи является активизирующая профориентация [2]. Апробированным механизмом управления по информированию и привлечению молодежи в АЗ и ДВ является Всероссийский профориентационный урок «Начни трудовую биографию с Арктики и Дальнего Востока!», состоявшийся в 2019 году в 25 регионах России, в нем приняли участие около 50 тысяч школьников 8-10 классов.

Для оценки особенностей профессионального самоопределения школьников, их ориентации на востребованные профессии, регионы Арктики и Дальнего Востока в рамках урока проведено анкетирование «до» и «после». Всего получено 12179 анкет до и 8876 анкет после. Структурно ответы респондентов по классам и типам регионов имеют минимальные отклонения, поэтому пригодны для сопоставления.

На основе полученных результатов установлено, что школьники российских регионов предпочитают профессии востребованные также в АЗ и ДВ. Школьники положительно отзываются о возможности карьерного старта в АЗ и ДВ. Более чем для половины обучающихся (64,5%) по результатам урока прояснилась ситуация с выбором профессии, для 32,4% школьников информация, полученная оказалась «очень полезной» еще для 45,9% «вполне полезной». Информация о профессиональной карьере в Арктике или на Дальнем Востоке заинтересовала 41,2% опрошенных школьников из российских регионов. Обучающиеся, которые высказали свой прямой и потенциальный интерес к профессиональной реализации в арктических и дальневосточных регионах, являются целевой аудиторией для предоставления дополнительной информации о рынке труда, возможностях построения карьеры, условиях жизни и других социальных и экономических эффектов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степущ И. С., Симакова А. В.* Миграционные потоки выпускников вузов для работы в Арктической зоне России: количественный и качественные аспекты. — Региональная экономика: теория и практика, 2018, т. 16, №10, с. 1872–1887.
2. *Гуртов В. А., Хотеева Е. А.* Планирование карьерной траектории школьников: ориентация на «хочу», «могу» и «надо». — Интеграция образования, 2018, т. 22, № 1, с. 134–150.

В. А. Гуртов, Л. В. Щеголева (Петрозаводск, ПетрГУ). **Математические модели для количественных оценок численности кадров высшей научной квалификации.**

Эффективное управление любой системой, в том числе экономической, опирается на количественные показатели, позволяющие не только оценить текущее состояние системы, но и спрогнозировать ее поведение на заданный интервал времени. Ключевым элементом системы обеспечения экономики страны наукоемкими технологиями являются кадры высшей научной квалификации — кандидаты и доктора наук.

Ежегодно происходит пополнение научного сообщества за счет новых защит диссертаций и одновременно старение и выбытие действующих членов сообщества. Для управления экономикой страны необходимы количественные оценки размеров научно-го сообщества и динамики его движения.

В докладе представлены модели, описывающие динамику численности кандидатов и докторов наук на основе статистических данных о количестве защит кандидатских и докторских диссертаций. Обобщенная модель движения лиц с учеными степенями:

$$N(t+1) = N(t) + N_{new}(t) - N_{out}(t) + N_{PhD} - N_{deprive}(t) - N_{leave}(t) \pm N_{status}(t),$$

где t — год; $N(t)$ — общее количество лиц, имеющих ученую степень и работающих на экономику России; $N_{new}(t)$ — количество защитившихся кандидатов и докторов наук; $N_{out}(t)$ — естественно возрастное выбытие; N_{PhD} — количество лиц, получивших признание ученой степени, полученной в другой стране; $N_{deprive}(t)$ — количество лиц, лишенных ученой степени; $N_{leave}(t)$ — количество лиц с ученой степенью, уехавших из России; $N_{status}(t)$ — количество лиц, изменивших уровень ученой степени, например, кандидат наук, защитивший докторскую диссертацию, выбыл из числа кандидатов наук и вошел в число докторов наук.

К сожалению, детальные статистические данные представлены только за короткий промежуток времени — за последние 8 лет. Этот факт вызывает необходимость в решении задачи оценки недостающих данных. В докладе представлены подходы для решения этой задачи.

На основе построенных динамических моделей численности кандидатов и докторов наук и моделей для прогнозирования потребностей экономики в кадрах высшей научной квалификации [1], а также на основе моделей количественной оценки состава диссертационных советов [2], формирующих систему восполнения научного сообщества, получены количественные оценки, характеризующие возможные перспективы развития научного сообщества России.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gurtov V. A., Shchegoleva L. V. Forecasting the Economic Need for Personnel with Higher Scientific Qualifications. — Studies on Russian Economic Development, 2018, v. 29, is. 4, p. 415–422.
2. Гуртов В. А., Щеголева Л. В. Моделирование динамики численности диссертационных советов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2018, т. 25, в. 3, с. 239–240.

В. А. Едемский (Великий Новгород, НовГУ). **О линейной сложности бинарных последовательностей, определяемых характерами конечных полей.**

В работе предлагается метод построения бинарных последовательностей с высокой линейной сложностью, определяемых посредством квадратичных характеров конечных полей. Линейная сложность бинарной последовательности (ранг) (s_i) над полем второго порядка определяется как наименьшее натуральное L , для которого выполняется следующее рекуррентное соотношение:

$$s_i = c_1 s_{i-1} + \dots + c_L s_{i-L} \quad \text{для } i \geq L,$$

где коэффициенты $c_1, c_2, \dots, c_L \in \{0, 1\}$ [1]. Последовательности с высокой линейной сложностью представляют интерес для криптографических приложений.

Пусть p — нечетное простое число и $\mathbb{F}_q$ — конечное поле порядка q , где $q = p^r$, $r \in \mathbb{N}$. Пусть $\{\gamma_1 = 1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ — базис $\mathbb{F}_q$, как линейного пространства над конечным полем $\mathbb{F}_p$ [1]. Любое целое число i от 0 до $q-1$ можно представить в виде:

$$i = i_1 + i_2 p + \dots + i_r p^{r-1}, \quad 0 \leq i_m < p, \quad m = 1, \dots, r,$$

и поставить ему в соответствие элемент $\mathbb{F}_q$ по правилу:

$$\xi_i = i_1 \gamma_1 + i_2 \gamma_2 + \dots + i_r \gamma_r.$$

Определим бинарную последовательность $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{q-1}, \dots)$ с периодом q следующим образом:

$$\sigma_i = (1 - \chi(\xi_i))/2 \text{ для } i : 0 \leq i < q \text{ и } \sigma_{i+q} = \sigma_i \text{ для } i \geq q,$$

где χ — квадратичный характер $\mathbb{F}_q$, $\chi(0) = 1$. Последовательность σ также можно определить посредством дискретного логарифма в $\mathbb{F}_q$.

Последовательность σ при $r = 1$ является последовательностью Лежандра, свойства которой, в том числе и линейная сложность, хорошо известны. Линейная сложность σ для $r = 2$ была вычислена в [2]. Здесь обобщаем результаты из [2] и показываем, что последовательность σ обладает высокой линейной сложностью при нечетных значениях r .

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 19-51-53003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988, 820 с.
2. Chen Z., Wang Q. On the k -Error Linear Complexity of Binary Sequences Derived from the Discrete Logarithm in Finite Fields. — Complexity, 2019, <https://doi.org/10.1155/2019/8635209>.

М. И. Елизарова, Н. А. Соколов, Е. Ю. Хрусталева (Москва, ЦЭМИ РАН). **Логико-лингвистическая модель ракетно-космической деятельности.**

С целью выполнения концептуального анализа наукоемких и высокотехнологичных производств, на которых создается ракетно-космическая техника, национальных и международных рынков ее реализации, а также выявления производимых на них изделий и технологий двойного назначения целесообразно построить логико-лингвистическую (концептуальную, семантическую) модель изучаемой предметной области [1, 2]. Практическое использование такой модели позволяет оценить экономическую безопасность, значимость и рисковость указанных производств [3–5], выявить основные (наиболее важные) объекты, которые определяют, формируют и осуществляют ракетно-космическую деятельность (РКД), организационно-экономические и производственные взаимосвязи между ними, а также процессы, в которых принимают участие данные объекты. Логико-лингвистическая модель РКД определяет свойства входящих в нее компонентов, ее структуру, различные виды взаимосвязей, оказывающих существенное влияние на данный вид производственной деятельности.

Необходимо подчеркнуть, что и раньше, и в настоящее время новые подходы к формулировке и решению комплексных проблем, возникающих при осуществлении РКД, формулируются в текстовой форме, которая обычно содержит ее смысловое описание с разных точек зрения. Приведенные в стратегических, методических и нормативно-правовых документах (см., например, документы РФФИ [6]) дефиниции могут отличаться не только по словарному представлению, но и по применяемым в них терминам, по структуре, последовательности изложения материала и множеством других текстовых характеристик. Для повышения эффективности практического применения указанных логико-лингвистических материалов, для оценки их качества, для проведения теоретической оценки, рациональности и перспективности сформулированных в документах проблем и особенностей развития РКД и обеспечивающих ее инновационное функционирование производств необходимо уметь разрабатывать и практически использовать комплексную логико-лингвистическую модель РКД и модели смежных с этой деятельностью предметных областей науки и производства.

Необходимость создания и использования макроуровневых концептуальных моделей объясняется следующим обстоятельством — с их помощью обеспечиваются оптимизация и усовершенствование как всего процесса создания и использования ракетно-космической техники, так и отдельных его этапов и компонентов. А поскольку выражение «проект создания инновационной ракетно-космической техники» формализовать с помощью математического инструментария достаточно сложно, роль математических выражений и формул способны с успехом выполнить логико-лингвистические модели, которые можно построить с помощью различных типов современных информационно-аналитических систем и технологий.

Перспективным и важным подходом к решению проблемы логико-лингвистического моделирования РКД представляется использование гипертекстовой технологии, предназначенной для работы с семантической информацией [7].

Сбор, изучение и систематизация стратегических, методических и нормативно-правовых документов, в которых описывается и регламентируется РКД, дают возможность разрабатывать реальные логико-лингвистические модели. Обычно модели данного типа интерпретируются как семантические сети или фреймы и имеют графическую структуру, работа с которой требует применения специального инструментария. Использование гипертекстовой технологии способствует созданию эффективных и адекватных реальности концептуальных моделей, а также выявлению новых инновационных механизмов их практической реализации.

Фрагмент логико-лингвистической модели гипертекстового типа, содержащей семантическое представление экономики производств, на которых создается современная ракетно-космическая техника

$$(M_{\text{экономика_предприятий_производящих_ракетно-космическую_технику}}),$$

и инновационно-инвестиционной деятельности

$$(M_{\text{инновационно-инвестиционная_деятельность}})$$

в формализованном виде может быть представлен следующим образом:

$(M_{\text{экономика_предприятий_производящих_ракетно-космическую_технику}}) = \{R \text{ (Государственная экономика)}, U \text{ (Ракетно-космическая деятельность)}, v \text{ (Экономика строительства ракетно-космических предприятий | Экономика научных, научно-технических и промышленных предприятий)}, f \text{ (Производственный и научный потенциал | Финансовые и сырьевые ресурсы | Организации и предприятия и организации ракетно-космической промышленности | Производственный персонал ракетно-космических предприятий | Научные кадры ракетно-космических предприятий | Услуги и продукция гражданского назначения | Технологии и изделия двойного назначения)}, s \text{ (Механизмы управления экономикой ракетно-космической промышленности | Экономическая конкуренция на национальных и международных рынках | Развитие и реструктуризация экономики ракетно-космической промышленности)}, p \text{ (Обеспечение потребностей страны ракетно-космической техникой)}, s \text{ (Национальная безопасность государства | Отечественный экономический потенциал)}, a \text{ (Национальный общественно-политический строй)}};$

$(M_{\text{инновационно-инвестиционная_деятельность}}) = \{R \text{ (Коммерческая деятельность)}, v \text{ (Запрещенная инновационно-инвестиционная деятельность | Инвестиционная деятельность отдельных российских граждан и юридических лиц за рубежом | Инновационно-инвестиционная деятельность зарубежных инвесторов на российской территории | Капитальные вложения)}, r \text{ (Инновационно-инвестиционные проекты | Инвестиции | Источники финансирования инновационно-инвестиционной деятельности | Объекты инновационно-инвестиционной деятельности | Субъекты инновационно-инвестиционной деятельности | Сертификат (лицензия) на инновационно-инвестиционную деятельность)}, e \text{ (Защита инновационно-}}$

инвестиционной деятельности | Государственное регулирование инновационно-инвестиционной деятельности | Споры при осуществлении инвестиционной деятельности | Приостановление или прекращение инновационно-инвестиционной деятельности), p (Привлечение финансовых средств для выполнения инновационно-инвестиционных проектов)}.

Все виды взаимосвязей объединены в группы, следующие друг за другом в определенном порядке: синонимия (=); взаимосвязь вид-род (R); взаимосвязь часть-целое (U); взаимосвязь процесс-надпроцесс (n); взаимосвязь род-вид (v); взаимосвязь целое-часть (f); взаимосвязь процесс-исполнитель роли (r); взаимосвязь процесс-этап процесса (e); взаимосвязь предмет-процесс (c); взаимосвязь следствие-причина (p); взаимосвязь причина-следствие (s), взаимосвязь ассоциативная (a). При построении модели указываются взаимосвязи только с ближайшими родственными объектами.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-010-00122а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хрусталева Е. Ю., Соколов Н. А. Распространение технологий и изделий двойного применения с помощью механизмов оборонно-гражданской интеграции. — Аудит и финансовый анализ, 2016, № 3, с. 406–411.
2. Макарова Д. Ю., Хрусталева Е. Ю., Хрусталева О. Е. Семантическая методология анализа и прогнозирования развития ракетно-космической промышленности. — Аудит и финансовый анализ, 2015, № 3, с. 88–93.
3. Бендикова М. А., Хрусталева Е. Ю. Экономическая безопасность наукоемких производств. — Вопросы экономики, 1999, № 9, с. 119–125.
4. Хрусталева Е. Ю. Финансово-экономическая значимость и рисковость наукоемких инновационных проектов. — Финансовая аналитика: проблемы и решения, 2013, № 8, с. 2–11.
5. Хрусталева Е. Ю., Соколов Н. А., Хрусталева О. Е. Концепция оценки и управления риском при реализации инновационных проектов создания интеллектуальной продукции. — Экономический анализ: теория и практика, 2013, № 44, с. 2–13.
6. Рудцкая Е. Р., Хрусталева Е. Ю., Цыганов С. А. Российский фонд фундаментальных исследований и инновационное развитие экономики России. — Экономическая наука современной России, 2007, № 2, с. 92–105.
7. Хрусталева Е. Ю. Методологические и теоретические основы гипертекстовой технологии моделирования экономических систем. — Концепции, 2010, № 1–2, с. 40–49.

Н. Л. Еремина, И. В. Краковецкая, Я. Н. Лопухин (Национальный исследовательский Томский государственный ун-т). **Подходы к оценке и управлению конкурентоспособностью студентов университетов.**

Ключевые слова: конкурентоспособность, оценка, студент, выпускник, университет, управление.

Конкурентоспособность современных выпускников вузов на рынке труда, их соответствие запросам многочисленных заинтересованных сторон (стейкхолдеров, от англ. stakeholder), являются сегодня определяющими критериями успешности национальных систем образования. В данном исследовании представлен один из возможных подходов к оценке конкурентоспособности студентов, основанный на исследовании темпов наращивания их конкурентного потенциала в период обучения в вузе.

Основными целями формирования в вузе системы оценивания конкурентоспособности студентов являются:

- 1) выявление конкурентных преимуществ студентов для разработки конкурентных стратегий развития их конкурентного потенциала;
- 2) определение слабых сторон и рисков, препятствующих достижению высокого уровня конкурентоспособности будущих выпускников на рынке труда.

Предлагаемая процедура оценки конкурентоспособности студентов во время обучения включает в себя следующие этапы.

1. Оценка конкурентного потенциала студентов. Выбираются индикаторы и показатели оценки, которые группируются в соответствии с видами деятельности студента. Проводится экспертное оценивание весов каждой группы m индикаторов p_i , где

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1,$$

а также N индикаторов r_j , где

$$0 \leq r_j \leq 1, \quad \sum_{i=1}^m n_i = N, \quad \sum_{i=1}^{n_i} r_j = 1,$$

и показателей в группах k_j в зависимости от степени их выполнения. Вычисляется показатель конкурентного потенциала студента $КП_C$ по методу свертывания векторного критерия в единый суперкритерий:

$$КП_C = \sum_{i=1}^m p_i \sum_{i=1}^{n_i} r_j k_j. \quad (1)$$

В результате получается взвешенная оценка или рейтинг конкурентной позиции студента. Аналогично (1) выполняется расчет интегрального показателя темпов роста потенциала студента $ИП_{ТР}$ за t лет (в зависимости от длительности образовательной программы).

2. Проектирование матрицы конкурентоспособности студентов университета. Осуществляется разбиение множества всех студентов S на подмножества S_{ij} в соответствии со значениями $КП_C$, $ИП_{ТР}$ и их критическими значениями для различных уровней. В результате формируется матрица $A = |a_{ij}|$, где a_{ij} — мощность подмножества S_{ij} .
3. Управление конкурентоспособностью студентов. Применение матричного моделирования дает возможность выделить кластеры, к которым могут быть применены различные конкурентные стратегии и управленческие решения.

Использование данного инструментария позволяет сформировать стратегии развития конкурентоспособности студентов, с учетом индивидуального подхода, что дает возможность будущим выпускникам наиболее эффективно реализовывать свой конкурентный потенциал в процессе обучения в университете.

А. В. Журавлёв (Томск, Национальный исследовательский Томский государственный университет). **Анализ диэлектрических спектров воды в широком диапазоне частот.**

Проблема контроля экологического состояния природных и искусственных водных источников является актуальной. Это обусловлено как растущими потребностями людей в пресной воде, так и увеличивающимся числом техногенных катастроф и несанкционированных сбросов отходов и сточных вод в природные водоисточники. Одним из методов оперативного контроля состояния водоисточников является определение их электрофизических характеристик.

В диапазоне частот 500 МГц–40 ГГц спектры комплексной диэлектрической проницаемости (КДП) ($\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon''$) измерялись на векторном анализаторе цепей E8363B фирмы «Agilent Technologies» при температуре 26° С. Образцы воды, были набраны из различных природных водоисточников Томской области. Для контроля проводились также измерения дистиллированной воды. Места забора проб представлены в первой колонке таблицы. Заборы проб проводились при продвижении с юга на север Томской области.

Таблица. Места забора проб и электрофизические характеристики воды природных водоисточников при температуре 26° С

Образец	ε_0	$\tau 10^{12}, c$
Дистиллированная вода	75.80	8.54
№ 1 (р. Томь, г. Томск)	77.30	8.74
№ 2 (р. Обь, п. Победа)	77.83	8.57
№ 3 (р. Бровка, п. Кривошеино)	81.17	8.62
№ 4 (р. Обь, п. Кривошеино)	78.92	8.54
№ 5 (р. Обь, п. Молчаново)	78.09	8.56
№ 6 (р. Обь, п. Леботер)	79.86	8.61
№ 7 (р. Чая, п. Чажемто)	80.55	8.55
№ 8 (р. Шуделька)	79.16	8.58
№ 9 (р. Обь, п. Каргасок)	79.20	8.48
№ 10 (минеральный источник, п. Чажемто)	96.50	8.55

Обработка измеренных спектров КДП проводилась по методике, описанной в работе [1]. Эта методика дает возможность определить наиболее вероятную модель диэлектрической релаксации методом проверки гипотез. В качестве базовой модели используется наиболее общая формула Гаврильяка–Негами:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{(1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha})^{\beta}}. \quad (*)$$

Здесь ε_{∞} — «оптическая», ε_0 — статическая проницаемости; τ — время релаксации; α, β — коэффициенты. Из (*) при $\alpha = 0, \beta = 1$ получается модель диэлектрической релаксации Дебая; при $\beta = 1, 0 < \alpha < 1$ — модель Коул–Коула; при $\alpha = 0$ и $0 < \beta < 1$ — модель Коул–Давидсона. После выбора наиболее вероятной модели проводится оценка параметров ε_{∞} , ε_0 и τ этой модели.

Обработка спектров, показала, что наиболее вероятной моделью диэлектрической релаксации исследованных при температуре 26° С образцов является модель Дебая (параметры в формуле (*) $\alpha = 0, \beta = 1$). Поскольку диапазон частот до 40 ГГц недостаточен для надежной оценки «оптической» диэлектрической проницаемости из наших измерений, то она бралась равной $\varepsilon_{\infty} = 5,6$. Результаты оценок величин ε_0 и τ по данной методике представлены в первой и второй колонках таблицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Суслев В. И., Тарасенко П. Ф., Журавлёв А. В., Журавлёв В. А. Выбор модели диэлектрической релаксации вещества на основе проверки гипотез. — Изв. Вузов. Физика, 1999, № 11, с. 15–22.

В. Н. Захаров, И. А. Шанин, С. А. Ступников (Москва, Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН). **Применение математических методов обнаружения аномалий для анализа временных рядов, порождаемых элементами жилищной инфраструктуры**⁵⁾.

Использование современных инфраструктурных решений делает актуальной задачу своевременного и эффективного детектирования нештатных ситуаций и интеллектуального мониторинга состояния бытового оборудования. Данная работа выполняется в рамках проекта, нацеленного на разработку комплекса программно-технических решений по созданию системы обеспечения мониторинга элементов жилищной инфраструктуры. В рамках исследования был создан экспериментальный стенд, на котором были проведены испытания основных элементов оборудования жилищной инфраструктуры: электрических насосов, силовых трансформаторов, систем вентиляции и кондиционирования, бойлеров и электрических котлов. В ходе испытаний были собраны и обработаны измерения датчиков, фиксирующих параметры работы оборудования: датчиков температуры, вибрации, освещенности, напряжения, шума, расходов воздуха и воды.

К полученным данным были применены следующие статистические и вероятностные модели, позволяющие классифицировать штатные и нештатные режимы работы оборудования:

- а) t -критерий Стьюдента использовался для детектирования значимых отклонений показаний датчиков от штатных значений, таким образом строился 95% доверительный интервал для детектирования аномальных значений в режиме реального времени;
- б) двухвыборочный критерий Колмогорова–Смирнова использовался для детектирования статистически значимых различий между распределениями показаний датчиков временного ряда в разных режимах работы;
- в) линейная регрессия использовалась для моделирования показаний датчиков линейной функцией, для последующего детектирования значимых отклонений от линейной модели. Модель применена к показаниям датчиков расхода воздуха вентиляционной установки и датчиков расхода воды электрического насоса, так как работа данного оборудования в штатном режиме обуславливает постоянный ток воздуха или воды;
- г) скрытая марковская модель использовалась для детектирования изменений скрытых состояний работы оборудования. Исследуемым скрытым состояниям соответствуют режимы работы оборудования, в частности, нештатные режимы работы. Обученная на размеченных данных скрытая марковская модель применяется для вычисления правдоподобия исследуемого на аномальность фрагмента временного ряда.

В результате анализа были построены модели различных классов характерных неисправностей оборудования. Полученные модели предназначены для использования в качестве теоретической основы при создании промышленных систем обеспечения мониторинга элементов жилищной инфраструктуры.

Н. Е. Казачек (Нижний Новгород, Нижегородский гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского). **Стохастический резонанс (по страницам журналов).**

Расширенная версия пленарного доклада будет опубликована в одном из следующих выпусков журнала.

⁵⁾ От Редакции. По решению Оргбюро ВСПИМ данный доклад был включен в научную программу в качестве приглашенного пленарного доклада.

А. В. Калинин, С. С. Кудряшов (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана).
Марковский процесс эпидемии SIRS $T_1 + T_2 \rightarrow 2T_2$; $T_2 \rightarrow T_1, T_3$; $T_3 \rightarrow T_1$ ⁶⁾

Рассматривается однородный во времени марковский процесс

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний $N^3 = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 0, 1, \dots\}$, переходные вероятности

$$P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \mathbf{P}\{\xi = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \mid \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}$$

которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$; $p_1 \geq 0$, $p_3 \geq 0$, $p_1 + p_3 = 1$)

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2+1, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2-1, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = p_1 \lambda_2 \alpha_2 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2-1, \alpha_3+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = p_3 \lambda_2 \alpha_2 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1+1, \alpha_2, \alpha_3-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = \lambda_3 \alpha_3 t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) = 1 - (\lambda_1 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_2 \alpha_2 + \lambda_3 \alpha_3) t + o(t).$$

Производящая функция переходных вероятностей

$$F_\alpha(t; s) = \sum_{\beta_1, \beta_2, \beta_3=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2} s_3^{\beta_3}, \quad |s_1| \leq 1, \quad |s_2| \leq 1, \quad |s_3| \leq 1,$$

удовлетворяет второму уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial t} = \lambda_1 (s_2^2 - s_1 s_2) \frac{\partial^2 F_\alpha(t; s)}{\partial s_1 \partial s_2} + \lambda_2 (p_1 s_1 + p_3 s_3 - s_2) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_2} + \lambda_3 (s_1 - s_3) \frac{\partial F_\alpha(t; s)}{\partial s_3}$$

с начальным условием $F_\alpha(0; s_1, s_2, s_3) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} s_3^{\alpha_3}$. Из второго уравнения «предельным переходом» выводится [2] нелинейная система дифференциальных уравнений [1]

$$\dot{x}_1 = -\lambda_1 x_1 x_2 + p_1 \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

$$\dot{x}_2 = \lambda_1 x_1 x_2 - \lambda_2 x_2,$$

$$\dot{x}_3 = p_3 \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3,$$

с начальным условием $x_1(0) = x_1^0$, $x_2(0) = x_2^0$, $x_3(0) = x_3^0$, где $x_1(t)$ — количество «восприимчивых к заболеванию» (S — susceptible), $x_2(t)$ — количество «инфицированных» (I — infectious), $x_3(t)$ — количество «выздоровевших с иммунитетом» (R — recovered (or immune), см. [1]) в момент t , $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0$.

⁶⁾ От Редакции. Доклад был прочитан на весенней сессии XX Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике (Кисловодск, 28 мая–4 апреля 2019 г.), но по техническим причинам публикуется в данном выпуске.

Точками стационарности системы являются

$$(x_1^{1c}, x_2^{1c}, x_3^{1c}) = (x_1^0 + x_2^0 + x_3^0, 0, 0)$$

и

$$(x_1^{2c}, x_2^{2c}, x_3^{2c}) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 - \lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_3 + p_3\lambda_2}, \frac{p_3\lambda_2(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 - \lambda_2/\lambda_1)}{\lambda_3 + p_3\lambda_2} \right).$$

На рис. 1, 2 даны графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и пример реализации марковского процесса [2], [3].

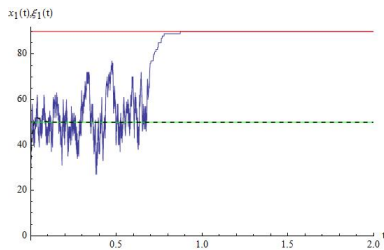


Рис. 1

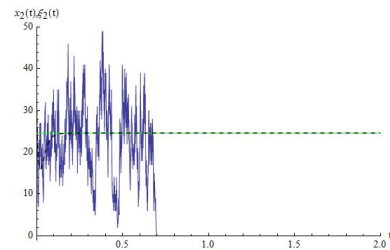


Рис. 2

Значения параметров: $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 250$; $\lambda_3 = 20$; $p_1 = 0,95$; $p_3 = 0,05$.

Начальные условия: $x_1^0 = \alpha_1 = 30$; $x_2^0 = \alpha_2 = 30$; $x_3^0 = \alpha_3 = 30$; $x_1^{2c} = 50$; $x_2^{2c} \approx 24,62$; $x_3^{2c} \approx 15,38$.

Отметим, что $\xi_1(t) + \xi_2(t) + \xi_3(t) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Процесс $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t))$ при $t \rightarrow \infty$ вырождается с вероятностью 1 в состоянии $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 0, 0)$.

На рис. 3 и 4 представлены двумерные гистограммы квазистационарного распределения (при условии невырождения) для значений чисел $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ частиц типов T_1 , T_2 и чисел $\xi_1(t)$, $\xi_3(t)$ частиц типов T_1 , T_3 .

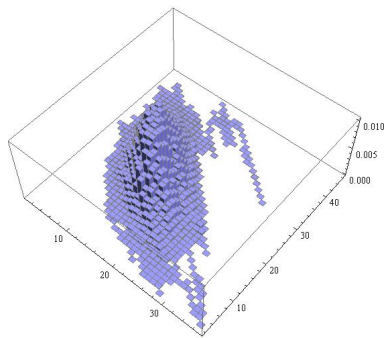


Рис. 3

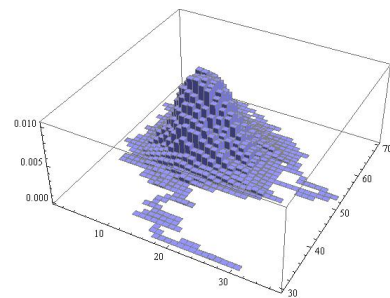


Рис. 4

Значения параметров: $\lambda_1 = 20$; $\lambda_2 = 250$; $\lambda_3 = 5$; $p_1 = 0,95$; $p_3 = 0,05$.

Начальные условия: $\alpha_1 = 30$; $\alpha_2 = 30$; $\alpha_3 = 30$;

Время моделирования: $t = 4$.

Точки стационарности: $x_1^{2c} = 12,5$; $x_2^{2c} \approx 22,14$; $x_3^{2c} \approx 55,36$.

При большом значении λ_2 гистограммы близки к графику плотности двумерного нормального распределения [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_modelling_of_infectious_disease
https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology
2. Кудряшов С. С. Стохастические аналоги основных детерминированных моделей эпидемий. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 144 с.
3. Калинин А. В. Статистическое моделирование дискретных марковских систем с взаимодействием. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017, 44 с.
<http://ebooks.bmstu.ru/catalog/109/book1630.html>

Ю. О. Королева, А. В. Королев (Москва, РГУ НиГ им. И. М. Губкина (НИУ)). **Системы Кессона и Хершела–Бакли.**

Рассматриваемая задача носит прикладной характер, относясь одновременно к таким разделам как гемодинамика и математическая физика. Умение предсказать поведение потока крови внутри сосудов и капилляров очень важно для медицины. Математики разработали некоторые модели, которые описывают течение крови в тонких капиллярах. Было установлено, что данное течение нельзя описать лишь моделью для Ньютонской жидкости. В областях, близких к стенкам сосудов, поток крови обладает иными реологическими свойствами. Это связано с тем, что концентрация твердых тел (эритроцитов), растворенных в плазме, значительно снижается в пристеночных зонах. В данной работе рассматриваются модели Кессона и Хершела–Бакли, описывающие движение крови по капиллярам:

$$\begin{aligned}\tau^{\frac{1}{2}} &= \tau_y^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\mu(r)} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^{\frac{1}{2}} && \text{при } \tau \geq \tau_y, \text{ (модель Кессона)} \\ \tau &= \tau_y + \mu(r)^{\frac{1}{n}} \left(-\frac{\partial u}{\partial r} \right)^{\frac{1}{n}} && \text{при } \tau \geq \tau_y, \text{ (модель Хершела–Бакли)} \\ \frac{\partial u}{\partial r} &= 0 && \text{при } \tau < \tau_y\end{aligned}$$

Здесь r — радиус-вектор капилляра, u — скорость потока, τ — напряжение, τ_y — граничное напряжение, задающее предел текучести, при переходе через который поток становится неньютоновским, $\mu(r)$ — переменная вязкость. Давление в сосудах определяется из уравнений состояния движения:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau) = 0.$$

Авторами изучается влияние шероховатости стенок сосуда на такие характеристики потока, как поле скоростей, сопротивление, объем жидкости, пройденный через фиксированный участок, а также рассматривается влияние переменной вязкости. Получены некоторые априорные оценки для скорости потока в зависимости от других параметров задачи. Для модели Кессона выведено аналитическое решение.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00311) и гранта Президента РФ для поддержки молодых ученых (проект МК-5870.2018.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Koroleva Yu. O., Korolev A. V. On some properties of solution to Herschel–Bulkley and Casson’s models of blood flow. — Вестник Современных Исследований, 2018, т. 8-1, в. 23, с. 344–349.
2. Медведев А. Е. Двухфазная модель течения крови. — Российский журнал биомеханики, 2013, т. 4, в. 17, с. 22–36.

А.А.Кудрявцев, В.Ю.Кузьмин, С.И.Палионная, С.Я.Шоргин (Москва, ВМК МГУ, Вай2Гео, ФИЦ ИУ РАН). **Программный комплекс анализа априорных обобщенных распределений Фреше**⁷⁾.

В современном мире появляется все больше систем, координирующих различные сферы человеческой деятельности. Эти системы настолько сложны, что определять их характеристики путем детерминированного анализа практически не представляется возможным. В связи с этим возникают различные индексы, рейтинги и показатели, так или иначе характеризующие состояние системы без проведения затратных по времени и финансам всесторонних исследований.

На состояние системы чаще всего воздействует множество факторов, которые, в свою очередь, можно разделить на два условных класса: положительно и отрицательно влияющие на работу целевого объекта. Факторы, способствующие правильному функционированию системы, далее для удобства записи будем называть p -факторами, а факторы, препятствующие функционированию, — n -факторами. Для исследования качественных характеристик функционирования системы рассматривается индекс баланса, который определяется как отношение n - к p -фактору модели. Очевидно, что для достижения баланса в системе нужно избегать большого расхождения между величинами факторов и приближать значение индекса баланса к единице.

В силу непостоянства состояния окружающей среды, влияющей на функционирование системы, значения n - и p -факторов модели непредсказуемым образом меняются. Это дает основание для рассмотрения факторов, а следовательно, и индексов баланса как случайных величин [1]. При этом изменения, происходящие в окружающей среде, не столь глобальны, чтобы кардинальным образом изменить природу факторов, поэтому в рамках конкретной задачи можно предположить, что законы, оказывающие влияние на факторы и индексы, остаются неизменными. Такая постановка задачи позволяет применить байесовский метод с заданными априорными распределениями исходных параметров системы.

Можно показать, что в случае, когда n - и p -факторы имеют априорные обобщенные распределения Фреше с плотностями вида

$$f(x) = \frac{u\alpha^{nu} e^{-(\alpha/x)^u}}{(n-1)! x^{nu+1}}, \quad u > 0, \quad \alpha > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x > 0,$$

вероятностные

характеристики индекса баланса выражаются через гамма-экспоненциальную функцию [2]

$$\text{Ge}_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Gamma(\alpha k + \beta), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in [0, 1), \quad \beta > 0.$$

В докладе приводятся аналитические, численные и графические результаты исследования байесовских моделей, полученные при помощи специализированного программного комплекса, в предположении, что факторы имеют обобщенное распределение Фреше.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 17-07-00577.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кудрявцев А. А. Байесовские модели баланса. — Информатика и ее применения, 2018, т. 12, в. 3, с. 18–27.
2. Кудрявцев А. А., Титова А. И. Гамма-экспоненциальная функция в байесовских моделях массового обслуживания. — Информатика и ее применения, 2017, т. 11, в. 4, с. 104–108.

⁷⁾ От Редакции. По решению Оргбюро ВСПИМ данный доклад был включен в научную программу в качестве приглашенного пленарного доклада.

В. Ю. Кузьмин (Москва, ООО «Вай2Гео»). **Сравнение многослойного перцептрона и LSTM сетей для прогнозирования моментов вероятностных распределений.**

В работе проведено сравнение различных архитектур нейронных сетей в задаче построения прогнозов значений моментов конечных нормальных смесей (математического ожидания, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса), полученных с помощью аппроксимации методом скользящего разделения смесей [1].

Методология поиска оптимальных гиперпараметров нейронных сетей была ранее апробирована при рассмотрении задачи отнесения прогнозируемого значения к одному из диапазонов возможных значений [2], в данной работе при применении схожей методологии осуществлен переход к построению непрерывных прогнозов.

В качестве входных данных для нейросетей используется последовательность моментов, выходными являются прогнозы значений на несколько следующих шагов. Рассмотрен набор конфигураций топологий сети, в частности, с 1, 2 и 3 скрытыми слоями и различным количеством нейронов.

Каждая конфигурация была обучена в режиме многослойного перцептрона (функция активации **ReLU**) и как рекуррентная LSTM сеть [3]. Качество построения прогноза сравнивалось в стандартных метриках **MSE** (средней квадратической погрешность) и **MAE** (средняя абсолютная ошибка). Кроме того, анализировались временные затраты на обучение.

Показано, что LSTM-сети значительно улучшают показатели по **MSE/MAE**-метрикам — примерно на порядок по сравнению с перцептроном. При этом на высокопроизводительном оборудовании с использованием GPU-ускорения многослойные перцептроны обучаются на 1–2 порядка быстрее, что позволяет приблизиться к построению прогнозов в реальном времени.

Анализ топологий показал, что увеличение количества нейронов в слоях, равно как и увеличение количества слоев не всегда приводит к улучшению качества прогноза — наилучшие результаты получены на одном скрытом слое для перцептрона и на двух слоях для LSTM-сети.

Для LSTM сети на выбранных конфигурациях были сравнены функции активации **softsign** и **tanh**, рассмотрен ряд оптимизаторов (**adam**, **adadelat** и пр.). Показано, что с учетом примененной методологии для всех рядов моментов наилучшая точность достигается при применении оптимизатора **adam** с функцией активации **tanh**.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-03100).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Королев В. Ю.* Вероятностно-статистические методы декомпозиции волатильности хаотических процессов. М.: Изд-во Московского ун-та, 2011, 512 с.
2. *Gorshenin A. K., Kuzmin V. Yu.* Improved architecture of feedforward neural networks to increase accuracy of predictions for moments of finite normal mixtures. — *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2019, v. 29, № 1, p. 79–88.
3. *Greff K., Srivastava R. K., Koutnik J., Steunebrink B. R., Schmidhuber J.* LSTM: A Search Space Odyssey. — *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2017, v. 28, is. 10, p. 2222–2232.

Е. В. Кутырёва (Москва, ТВП). **К вопросу о параметрах одного алгоритма итерационного декодирования**⁸⁾.

В итерационных алгоритмах декодирования построенные проверочные соотношения соответствующего кода используются для исправления искаженного кодового слова и получения нового слова, на каждой итерации всё более близкого к исходному кодовому слову (см. [1, 2]).

Рассмотрим генератор гаммы, состоящий из РСЛОС длины L с характеристическим многочленом $g(x)$ и некоторой функции усложнения. Каждый участок выходной последовательности РСЛОС длины L можно рассматривать как кодовое слово двоичного линейного кода C длины L и размерности N . Тогда соответствующий участок гаммы длины N можно рассматривать как кодовое слово, переданное по двоичному симметричному каналу, где каждый символ искажается с вероятностью $p < \frac{1}{2}$ и передается без искажения с вероятностью $1 - p$.

Опишем в общем виде алгоритм итерационного декодирования (см. [1, 3]).

Определим k -член $q(x)$, кратный характеристическому многочлену $g(x)$,

$$q(x) = 1 \oplus x^{i_1} \oplus \dots \oplus x^{i_{k-1}}.$$

Выполняется соотношение $b_{i+i_1} \oplus b_{i+i_2} \oplus \dots \oplus b_{i+i_{k-1}} = x_i \oplus \varepsilon_{i+i_1} \oplus \varepsilon_{i+i_2} \oplus \dots \oplus \varepsilon_{i+i_{k-1}}$. Здесь x_i , $i = \overline{1, N}$ — знаки выходной последовательности РСЛОС, b_i , $i = \overline{1, N}$ — наблюдения над ними (знаки гаммы), ε_i , $i = \overline{1, N}$ — искажения.

Соотношения $x_i = x_{i+i_1} \oplus x_{i+i_2} \oplus \dots \oplus x_{i+i_{k-1}}$, $1 \leq i + i_j \leq t$, построенные с помощью k -члена $q(x)$, будем называть k -членными (проверочными) соотношениями, ассоциированными с последовательностью x_i . Обозначим через $m_k(i)$ число таких соотношений, которые можно использовать при количестве материала $N \ll 2^L - 1$.

Через $m_{0,k}(x_i)$ обозначим мощность следующего множества

$$\{(i_1, \dots, i_{k-1}), 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{k-1} \leq N, 1 \leq i + i_j \leq N | \\ g(x) | q(x), b_{i+i_1} \oplus b_{i+i_2} \oplus \dots \oplus b_{i+i_{k-1}} = 0\}.$$

По наблюдаемому набору значений $m_{0,k}(x_i)$, $3 \leq k \leq d$, $d \ll N$, будем определять значение x_i , подсчитав апостериорную вероятность того, что x_i принимает фиксированное значение. Обозначим через $m \geq 3$ минимальное значение k такое, что $N_k(i) = 1$. Пусть $\hat{\Delta} = 2p - 1$.

Алгоритм

1. Устанавливаем номер итерации алгоритма $r = 0$.

2. Для $i = \overline{1, N}$

(а) Подсчитываем величину $S(r) = \frac{1}{2} \sum_{k=m}^d m_k(i) \arg \tanh((-1)^k \hat{\Delta}^{k-1})$.

(б) Подсчитываем величину $S_1(r) = \sum_{k=m}^d m_{0,k}(x_i) \arg \tanh((-1)^k \hat{\Delta}^{k-1})$.

(с) Если $S_1(r) \geq S(r)$, $x_i(r) = 1$, в противном случае $x_i(r) = 0$. При $r = 1$ переходим к п.2.4, в противном случае — к п.2.1.

Если $\hat{\Delta}_i(1) \geq \hat{\Delta}_i$, алгоритм заканчивает работу, на выходе — неуспех, в противном случае переходим к п.2.1.

3. Выполняем присваивание $b_i = x_i(r)$, $i = \overline{1, N}$. Увеличиваем номер итерации на единицу. Переходим к п. 2.

⁸⁾ От Редакции. Доклад был прочитан на весенней сессии XX Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике (Кисловодск, 28 мая–4 апреля 2019 г.), но по техническим причинам публикуется в данном выпуске.

Не умаляя практической значимости описанного алгоритма, следует отметить, что при переоценке вероятности значения x_i в данном алгоритме используются полиномы, которые могут иметь другие общие неизвестные, кроме x_i . Это приводит к получению неверных оценок апостериорной вероятности искажения x_i , и, как следствие, к искажению теоретических оценок для данного алгоритма, например, может занижаться количество требуемого для решения задачи материала.

Утверждение 1. Среднее число $E(l)$ различных переменных в множестве полиномов степени d , $d > 3$, кратных полиному $P(x)$, образующих ортогональную систему относительно неизвестного x_i , вычисляется по формуле

$$\sum_{k=d-2+m_d(i)}^{(d-1)m_d(i)} Pl = k \cdot k,$$

его можно оценить снизу величиной

$$(d-1) \cdot m \prod_{k=1}^{m_d(i)-1} \frac{\binom{N-1-k(d-1)}{d-1}}{\binom{N-1}{d-1} - k}.$$

Утверждение 2. Среднее число полиномов степени d , $d > 3$, кратных полиному $P(x)$, образующих ортогональную систему относительно неизвестного x_i , ее можно оценить величиной

$$\frac{1}{d-1} \sum_{k=d-2+m_d(i)}^{(d-1)m_d(i)} \frac{k \cdot \binom{N-1}{k} (N - \lceil \frac{k}{m} \rceil)^{m_d(i)-k \bmod m_d(i)} ((\binom{N-\lceil \frac{k}{m} \rceil-1}{d-\lceil \frac{k}{m} \rceil-1} (d - \lceil \frac{k}{m} \rceil - 1)!)^{m_d(i)}}{(\binom{N-1}{m_d(i)} ((\binom{N-2}{d-1} (d-1)!)^{m_d(i)})}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Canteaut A., Trabbia M. Improved fast correlation attacks using parity-check equations of weights 4 and 5. Advances in cryptology – Eurocrypt'00, V. 1807 of Lecture notes in computer science, Springer Verlag, 2000, p. 573–588.
2. Meier W., Staffelbach O. Fast correlation attack on certain stream ciphers. — Journal of cryptology, 1989, v. 1, p. 159–176.
3. Mitton M. An analysis and an improvement of iterative fast correlation attacks. — Journal of Discrete Mathematical Science and Cryptography, 2005.

В. М. Максимов (Москва, РГГУ). **Памяти В. О. Вискова** — одного из создателей некоммутативного анализа⁹⁾.

Некоммутативный анализ возник практически одновременно с математическим анализом в конце XVII века – начале XVIII века. Основными объектами исследования были операции дифференцирования D , интегрирования I , умножения на переменную, обозначаемую X , операция взятия значения в нуле V_0 и операция сдвига аргумента на константу a , обозначаемая E^a . Достаточно сказать, что все эти операции задействованы в «универсальном» ряде Бернулли (Johann Bernoulli, 1690 г.), в формуле Тейлора (Brook Taylor) и формуле Маклоренна (Colin Maclaurin).

⁹⁾ От Редакции. По решению Оргбюро ВСППМ данный доклад был включен в научную программу в качестве приглашенного пленарного доклада. Запланировано, что расширенная версия доклада будет опубликована в одном из следующих выпусков журнала.

В математическом анализе главное внимание уделяется изучению функций с помощью этих операций, в то время как *некоммутативный анализ* занимается изучением алгебраических соотношений между этими операциями с привлечением новых операций и действий с этими операциями типа образования новых объектов в виде формальных рядов из таких операций. До тех пор, пока не было четких общепринятых понятий алгебры, операторов, полей и их классификаций, некоммутативный анализ представлялся в различных формах символических исчислений. Символические исчисления Блиссарда (John Blissard) и Хевисайда (Oliver Heaviside) можно считать последними. Развитие алгебры в начале XX века дало возможность снять налет таинственности в исчислениях Блиссарда и Хевисайда. Это сделано в основном в работах Е. Белла (Eric Temple Bell), Ж.-К. Рота (Gian-Carlo Rota) и Я. Микусинского (Jan Mikusinski) и их учеников. Можно сказать, что с этого момента некоммутативный анализ стал объектом активных исследований, особенно его приложений, связанных с трудными вопросами математического анализа, комбинаторики и теории вероятностей. Предметом некоммутативного анализа может быть любая алгебра (не только над полями вещественных и комплексных чисел), которую можно расширить рядами из элементов этой же алгебры. Одним из важнейших примеров такой алгебры является алгебра Вейля (André Abraham Weil), порождаемая, например, операторами D и X . Как раз такой алгеброй и ее расширением рядами работал О. В. Висков. Формально алгебра Вейля определяется своими образующими, обычно обозначаемыми p, q и $\mathbf{1}$, и соотношением $pq - qp = \mathbf{1}$. При этом $\mathbf{1}$ является единичным элементом, а расширенная алгебра Вейля определяется рядами вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(q) p^n,$$

где $f_n(q)$ могут быть любыми многочленами над полем вещественных (или комплексных) чисел. Эти ряды образуют алгебру, если при перемножении членов ряда использовать соотношения Вейля. Очевидно, что такая алгебра формальных рядов содержит исходную алгебру Вейля как подалгебру. Одним из важнейших инструментов О. В. Вискова для получения новых результатов в анализе была замена формальных образующих p и q конкретными операторами. В результате оказывалось, что многие различные по смыслу результаты анализа, особенно в теории специальных функций (многочленов), имели в своей основе одну и ту же алгебраическую формулу. Это позволяло по-новому взглянуть как на старые, так и новые проблемы. Такой некоммутативный подход к классическим задачам анализа дал целый ряд интересных результатов. К ним можно отнести формулу обращения рядов (в смысле суперпозиции) и формулу обращения Лагранжа в многомерном случае, а также характеристику вероятностных распределений, общая формула которой содержит все известные характеристики. В частности, получена характеристика равномерного распределения. Многочисленные работы О. В. Вискова относятся также к многочленам Аппеля (Paul Émile Appell), Эрмита (Charles Hermite), Ларгепа (Edmond Nicolas Laguerre) и др. и приложений полученных результатов к трудным проблемам статистики.

Э. Ш. Насибуллова (Уфа, ИМех УФИЦ РАН). **Исследование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер при внешнем воздействии.**

В работе численно исследуется акустическое рассеяние от звукопроницаемых сфер (волна проходит через границу раздела), центры которых расположены на одной оси, при прохождении сферической волны от монопольного источника излучения. Целью работы является обобщение численной модели и методики расчета для определения поля вокруг и внутри коаксиальных сфер при воздействии монопольного источника излучения, произвольным образом расположенного в пространстве.

При решении уравнения Гельмгольца использовалась численная техника [1], основанная на быстром методе мультиполей, которая позволяет достичь высокой точности получаемых результатов, а также минимизировать машинное время.

Проведен численный параметрический анализ значения потенциала на поверхности сфер и распределения давления внутри и вне сфер для различных значений радиусов, физических характеристик внешней и внутренней сред (плотность и скорость звука), расстояния между сферами, расположения монопольного источника излучения. На рис. представлены три диаграммы распределения модуля нормированного давления $p_{\text{common}}/p_{\text{in}}$ (p_{common} — общее давление в/вне сфер; p_{in} — давление падающего поля) для трех сфер радиусов

$$a_1 = \frac{3,0255}{k} \quad \text{и} \quad a_2 = a_3 = 1,3253 a_1$$

(k — волновое число) при различных значениях физических параметров окружающей и внутренней сред и монопольного источника, расположенного на расстоянии $d = 10 a_1$ от центра первой сферы на оси, соединяющей центры этих сфер. Получено, что при определенных значениях параметров системы возможно появления зон повышения или понижения давления.

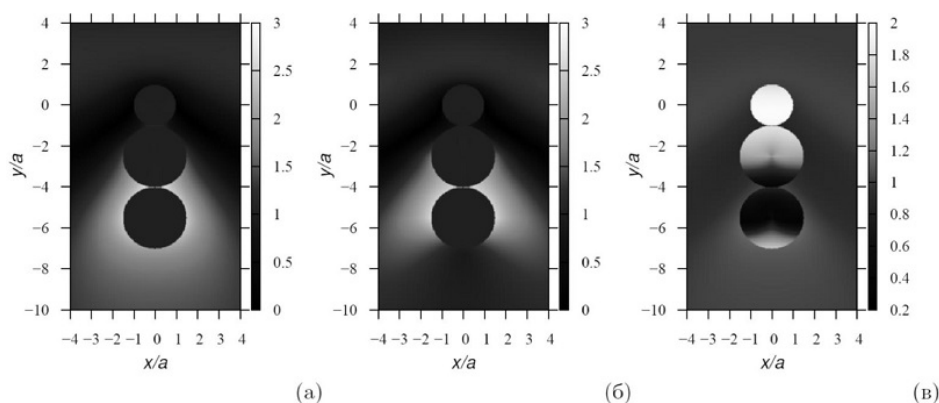


Рис. Диаграмма распределения модуля нормированного давления вокруг трех коаксиальных сфер при монопольном источнике излучения:

- (а) — воздушные пузырьки в воде;
- (б) — воздушные пузырьки в дихлорэтано;
- (в) — капли воды в дихлорэтано

Полученные результаты в дальнейшем планируется использовать для обобщения математической модели и методики расчета, а также для проведения тестовых расчетов при верификации общего численного алгоритма в случае множества произвольно расположенных в пространстве звукопроницаемых сфер.

Работа поддержана средствами государственного бюджета по госзаданию № 0246-2019-0052, гранта РФФИ (№ 17-41-020582-р_а) и Академии наук Республики Башкортостан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gumerov N. A., Duraiswami R. Computation of scattering from N spheres using multipole reexpansion. — J. Acoust. Soc. Amer., 2002, v. 112, № 6, p. 2688–2701.

Э. Ш. Насибуллаева, И. Ш. Насибуллаев, Е. А. Налобина
(Уфа, ИМех УФИЦ РАН). **Управление течением жидкости в микроканале с помощью пьезоэлемента.**

В работе численно моделируется течение рабочей жидкости в цилиндрическом микроканале с эластичными стенками, центральная часть которого расположена внутри пьезоэлектрического кольца (пьезоэлемента). Течение индуцируется как деформацией канала пьезоэлементом по гармоническому закону, так и перепадом давления на входе и выходе в микроканал.

Целью работы является адаптация трехмерной компьютерной модели, полученной в работе [1], для практического применения — управления режимом течения жидкости в канале с помощью величины перепада давления и частоты сжатия трубки пьезоэлементом.

При полном численном моделировании упругие деформации стенки микроканала определялись с помощью линейных уравнений Ламе [2] с граничными условиями Неймана на поверхности контакта трубки и пьезоэлемента; динамика течения несжимаемой вязкой жидкости изучалась на основе решения уравнений Навье–Стокса [3] с помощью итерационного метода Ньютона с предварительным расчетом по методу Пикарда для повышения устойчивости. Уравнения решались в вариационной форме методом конечных элементов в пакете численного моделирования FreeFem++ [4].

Полное моделирование требует больших затрат машинного времени, поэтому целесообразно построить модель элемента вычислительного стенда, которая позволяет по заданным входным параметрам найти расход жидкости с помощью простых аналитических формул, построенных с помощью аппроксимации результатов расчета по полной модели для отдельных наборов параметров. Моделирование элемента вычислительного стенда позволит проводить вычисления в реальном времени с непосредственной интеграцией в систему управления техническим устройством.

Получены численные результаты расхода жидкости в зависимости от времени, физических свойств жидкости (вязкости и плотности) и внешнего воздействия (величина градиента давления, амплитуда и частота сжатия пьезоэлемента). Построенная аналитическая модель элемента вычислительного стенда в сравнении с полным численным моделированием продемонстрировала высокую точность. Показаны варианты использования полученных результатов в практических приложениях. Например, в системе жидкостного охлаждения полученное соотношение между параметрами системы позволяет определить режим течения, предотвращающий втекание нагретой жидкости через выходное отверстие канала.

Результаты планируется использовать при разработке вычислительного стенда капиллярного микрозахвата, содержащего две трубки (на входе и выходе) с пьезоэлементами, разделив устройство на две части — с динамически изменяемой и неизменной геометриями, — что значительно упростит полное моделирование.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президиума РАН «Актуальные проблемы робототехнических систем».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш., Даринцев О. В. Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал. — Многофазные системы, 2018, т. 13, № 3, с. 1–10.
2. Ландау Л., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987, 248 с.
3. Ландау Л., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988, 736 с.
4. Hecht F. New development in FreeFem++. — J. Numer. Math., 2012, v. 20, № 3–4, p. 251–265.

Н. А. Окунь, Н. А. Соколов, О. Е. Хрусталеv (Москва, ГАУГН, ЦЭМИ РАН). Оценка динамики показателей риска в процессе выполнения инновационного проекта.

Традиционно используемые формулы для расчета вероятности $\mathbf{P}$ успешного выполнения инновационного проекта, вероятности $\mathbf{P}_{cp}$ финансового ущерба, который получит заказчик в случае невыполнения проекта, и математического ожидания $\mathbf{M}_y$ данного ущерба позволяют по существу охарактеризовать величину априорного (до начала выполнения работ по проекту) риска выполнения проекта, т. е. получать прогнозные значения $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}_{cp}$, $\mathbf{M}_y$ перед началом выполнения работ [1]. Обозначим эти величины при дальнейшем изложении, соответственно, $\mathbf{P}^0$, $\mathbf{P}_{cp}^0$, $\mathbf{M}_y^0$.

Очевидно, что в процессе выполнения проекта после успешного завершения каждого этапа риск будет изменяться, и его величина будет определяться начальным риском и количеством успешно выполненных этапов [2, 3].

Обозначив $\mathbf{P}_{cp}^i$ вероятность срыва выполнения инновационного проекта при условии успешного выполнения первых i этапов, получим расчетную формулу для ее определения путем подстановки в формулу расчета $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P} = p_1 p_2 \cdots p_n$) значений $p_i = 1$ для всех успешно завершённых этапов проекта:

$$\mathbf{P}_{cp}^i = 1 - \prod_{l=i+1}^n p_l.$$

Имея в виду, что в этом случае априорная вероятность срыва

$$\mathbf{P}_{cp}^0 = 1 - \prod_{i=1}^n p_i,$$

легко выразить $\mathbf{P}_{cp}^i$ через $\mathbf{P}_{cp}^0$ и вероятности успешного выполнения завершённых этапов p_i , т. е. определить характер динамики вероятности срыва проекта в процессе его выполнения:

$$\mathbf{P}_{cp}^i = 1 - \frac{1 - \mathbf{P}_{cp}^0}{\prod_{l=1}^i p_l}.$$

При $i = 1$ имеем

$$\mathbf{P}_{cp}^1 = 1 - \frac{1 - \mathbf{P}_{cp}^0}{p_1},$$

при $i = 2$ имеем

$$\mathbf{P}_{cp}^2 = 1 - \frac{1 - \mathbf{P}_{cp}^0}{p_1 p_2},$$

и т. д. При $i = n - 1$ имеем

$$\mathbf{P}_{cp}^{n-1} = 1 - \frac{1 - \mathbf{P}_{cp}^0}{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} = 1 - p_n,$$

при $i = n$ получаем

$$\mathbf{P}_{cp}^n = 0.$$

Величины $\mathbf{M}_y$ ($\mathbf{M}_y^n$) для каждого проекта (варианта проекта) после успешного завершения i -го этапа его выполнения рассчитываются путем подстановки в формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y &= C_1 + C_2 p_1 + C_3 p_1 p_2 + \cdots + C_n p_1 \cdots p_{n-1} - Q_n p_1 \cdots p_n \\ &= C_1 + \sum_{j=i+2}^n \left[C_j \prod_{l=1}^{i-1} p_l \right] - Q_n \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y^n &= q_1 + q_2 p_1 + q_3 p_1 p_2 + \cdots + q_n p_1 \cdots p_{n-1} - p_1 \cdots p_n \\ &= q_1 + \sum_{j=i+2}^n \left[q_i \prod_{l=1}^{i-1} p_l \right] - \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (2)$$

где C_l — стоимость l -го этапа проекта, Q_i — величина финансовых средств, израсходованных заказчиком на оплату выполненных этапов, значений: $p_i = 1$ для всех успешно завершённых этапов, если эти этапы выполнялись только у одного проекта (варианта проекта);

$$p_i = 1, \quad C_i = S_i, \quad q_i = S_i^n$$

для всех успешно завершённых этапов; здесь S_i, S_i^n — расходы заказчика на оплату конкурсных мероприятий по выполнению i -го успешно завершённого этапа проектирования, одинаковые для всех вариантов инновационного проекта.

В общем случае зависимость

$$\mathbf{P}_{cp}^i = f(i)$$

представляет собой монотонно убывающую функцию, конкретный вид которой определяется величиной произведения вероятностей успешно выполненных этапов. Примеры возможной динамики вероятностей срыва двух проектов представлены на рис.

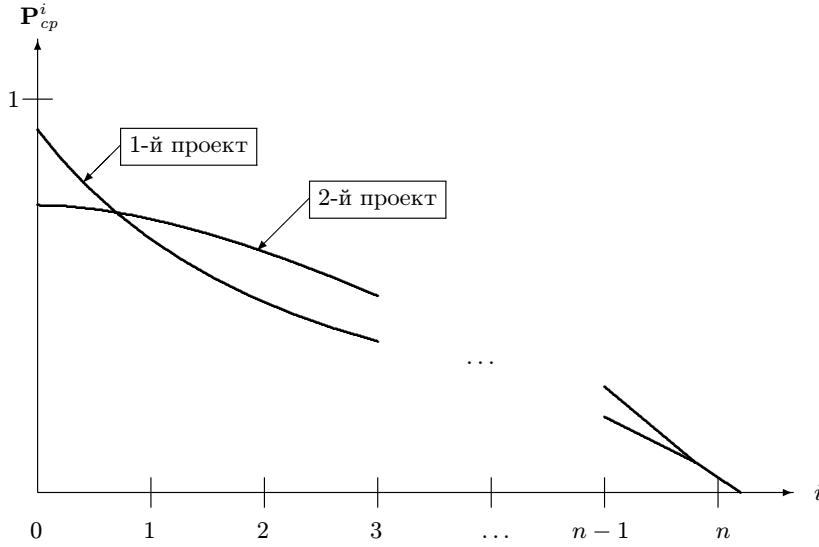


Рис. Возможная динамика вероятности срыва проектов

После подстановки указанных значений p_l, C_i, q_i в формулы для расчета (1) и (2) эти формулы приобретают следующий вид:

при успешном выполнении i этапов только одного проекта

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y^i &= C_1 + \dots + C_{i+1} + C_{i+2} p_{i+1} + C_{i+3} p_{i+1} p_{i+2} + \dots + C_n p_{i+1} \dots p_{n-1} \\ - Q_n \mathbf{P}^0 &= \sum_{j=1}^{i+1} C_j + \sum_{j=i+2}^n \left[C_j \prod_{l=1}^{j-2} p_{l+1} \right] - Q_n \mathbf{P}^0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y^n &= q_1 + \dots + q_{i+1} + q_{i+2} p_{i+1} + q_{i+3} p_{i+1} p_{i+2} + \dots + q_n p_{i+1} \dots p_{n-1} \\ - \mathbf{P}^0 &= \sum_{j=1}^{i+1} q_j + \sum_{j=i+2}^n \left[q_j \prod_{l=1}^{j-2} p_{l+1} \right] - \mathbf{P}^0; \end{aligned} \quad (4)$$

при успешном выполнении i этапов нескольких проектов

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y^i &= S_1 + \dots + S_i + C_{i+1} + C_{i+2} p_{i+1} + C_{i+3} p_{i+1} p_{i+2} + \dots + C_n p_{i+1} \dots p_{n-1} \\ -Q_n \mathbf{P}^0 &= \sum_{j=1}^i S_j + C_{i+1} + \sum_{j=i+2}^n \left[C_j \prod_{l=1}^{j-2} p_{l+1} \right] - Q_n \mathbf{P}^0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_y^n &= q_1 + \dots + q_{i+1} + q_{i+2} p_{i+1} + q_{i+3} p_{i+1} p_{i+2} + \dots + q_n p_{i+1} \dots p_{n-1} \\ -\mathbf{P}^0 &= q_1 + \sum_{j=i+2}^n \left[q_j \prod_{l=1}^{j-2} p_{l+1} \right] - \mathbf{P}^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что величина математического ожидания финансового ущерба заказчика, рассчитанная по формулам (3)—(6), уже не может быть принята в качестве исходной для определения суммы резерва или страховки. Это связано с тем, что формулы содержат в своем составе слагаемые C_j (q_j) и S_j (S_j^n), являющиеся стоимостями завершённых этапов работ, т. е. объёмы фактически израсходованных средств, которые подлежат резервированию (страхованию). Поэтому в качестве исходной величины для определения размеров резерва (страховой суммы) отобранного инновационного проекта (варианта проекта) целесообразно принять математическое ожидание финансовых потерь заказчика на незавершённых к моменту отбора этапах проекта: $i+1, i+2, \dots, n$, т. е. величину

$$\mathbf{M}_{yucx}^i = \mathbf{M}_y^i - \sum_{j=1}^i C_j$$

или

$$\mathbf{M}_{yucx}^{in} = \mathbf{M}_y^{in} - \sum_{j=1}^i q_j.$$

С учетом (3)–(6) имеем

$$\begin{aligned} M_{yucx}^i &= C_{i+1} + \sum_{j=i+2}^n \left[C_j \prod_{l=1}^{j-2} p_{l+1} \right] - Q_n \mathbf{P}^0, \\ M_{yucx}^{in} &= q_{i+1} + \sum_{j=i+2}^n \left[q_j \prod_{l=1}^{j-2} p_{l+1} \right] - \mathbf{P}^0. \end{aligned}$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-06-00260а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хрусталева Е. Ю. Финансово-экономическая значимость и рисковость наукоемких инновационных проектов. — Финансовая аналитика: проблемы и решения, 2013, № 8, с. 2–11.
2. Хрусталева Е. Ю., Соколов Н. А., Хрусталева О. Е. Концепция оценки и управления риском при реализации инновационных проектов создания интеллектуальной продукции. — Экономический анализ: теория и практика, 2013, № 44, с. 2–13.
3. Хрусталева О. Е., Хрусталева Ю. Е. Инструментальные методы оценки реализуемости наукоемкого инвестиционного проекта — Экономический анализ: теория и практика, 2011, № 27, с. 8–18.

Г. С. Осипов, Е. В. Осипова (Южно-Сахалинск СахГУ; Санкт-Петербург, ФМЛ № 30). **О решении обратных задач с нечеткими соответствиями.**

Представим реляционное уравнение (левое) как композицию нечетких соответствий:

$$x \circ g = y, \quad x \in \mathbb{R}_{[0,1]}^{mn}, \quad g \in \mathbb{R}_{[0,1]}^{n,k}, \quad x \in \mathbb{R}_{[0,1]}^{mk}. \quad (1)$$

Очевидно, уравнение (1) представляет собой k независимых систем из m нечетких полиномиальных уравнений, которые, например, с использованием треугольных норм, могут быть записаны следующим образом:

$$\left\{ \max_j (T(x_{ij}, g_{jl})) = y_{il} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad l = \overline{1, k}. \right.$$

При

$$i = \text{fix}, \quad l = \text{fix}$$

имеем отдельные нечеткие полиномиальные уравнения вида:

$$\max_j (T(x_j, g_j)) = y \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2)$$

для которых справедливы следующие утверждения:

1. Для того чтобы уравнения вида (2) имели решение $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\exists q \ (1 \leq q \leq n) : g_q \geq y.$$

Необходимость $(\exists (x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0) \Rightarrow \exists q \ (1 \leq q \leq n) : g_q \geq y :$

Пусть $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$ — решение уравнения (2). Тогда найдется по крайней мере одно число $q \leq n$ для которого выполняется равенство $T(x_q^0, g_q^0) = y$, а это значит, что $g_q \geq y$.

Достаточность $(\exists q \ (1 \leq q \leq n) : g_q \geq y \Rightarrow (\exists (x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)) :$

Пусть $\exists q \ (1 \leq q \leq n) : g_q \geq y$. Тогда хотя бы одно из уравнений $T(x_q, g_q) = y$, имеет решение, следовательно для (2):

$$\max_j (T(x_j, g_j)) = \max(T(x_1, g_1) \leq y, T(x_2, g_2) \leq y, \dots, T(x_n, g_n) = y, \dots) = y.$$

2. Компоненты максимального решения уравнений определяются следующим образом:

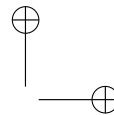
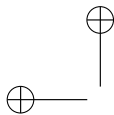
$$\bar{x}_j^0 = \begin{cases} 1 & g_j \leq y \\ r & g_j > y \end{cases} \quad (j = \overline{1, n}),$$

где

$$\begin{cases} y \\ y/g_J & P(X_J, G_J) \\ y - g_J + 1 & W(x_J, G_J) \end{cases}$$

Здесь M , P и W — логическое, алгебраическое и граничное произведение, соответственно. 3. Компоненты минимального решения уравнений: , где . В качестве примера решим многокаскадное уравнение с композицией нечетких соответствий вида: . (3)

Пусть [1]: . При использовании в качестве импликации граничного произведения уравнение (3) примет вид: . Получили две системы $(l = 1, 2)$ из двух уравнений $(i = 1, 2)$. Решение в среде Wolfram Mathematica [2]. Решение обратных задач с нечеткими соответствиями является базовой составляющей нечетких диагностических экспертных систем, находящихся применение в технике, медицине и других предметных областях.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Г.С.* Нечеткая модель подбора факультативов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 83–84. URL: [http:// www.tvp.ru/conferen/vsppmXX/kidso003.pdf](http://www.tvp.ru/conferen/vsppmXX/kidso003.pdf) (дата обращения: 14.07.2019)
2. *Осипов Г.С., Вашакидзе Н.С., Филиппова Г.В.* О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде Wolfram Mathematica. — Постулат, 2018, № 1 (27), с. 42. DOI: 10.18411/Postulat-2018-1. idSP: <http://sp-identifier.ru/000001postulat-2018-1>

Ю. Л. Павлов (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **Кластерная структура конфигурационных графов.**

Рассмотрим конфигурационный граф с N вершинами [1], степени которых $\xi_1, \dots, \xi_N$ — такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что

$$p_k = \mathbf{P} \{ \xi_i = k \} = \frac{1}{k^\tau} - \frac{1}{(k+1)^\tau}, \quad (1)$$

где $i = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots$, τ — положительный параметр. В случае необходимости для обеспечения четности суммы степеней вершин в граф вводится вспомогательная вершина единичной степени. Степень каждой вершины равна числу выходящих из нее различных полуребер, а ребра графа образуются путем попарного равновероятного соединения полуребер друг с другом. В таком графе возможны петли и кратные ребра.

Пусть Q — максимальная модулярность графа [2] и C — глобальный кластерный коэффициент [3]. Обозначим

$$q_k = (k+1) \frac{p_{k+1}}{\mathbf{E} \xi_1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

и пусть

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k,$$

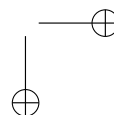
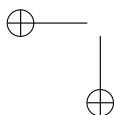
$$M = \frac{1}{\mathbf{E} \xi_1} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k.$$

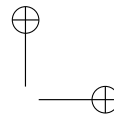
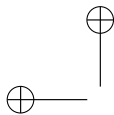
Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда асимптотически почти наверное справедливы следующие утверждения:

- 1) если $M \leq 1$, то $Q \rightarrow 1$.
- 2) если $M > 1$, то $Q \geq 1 - (1 - F(q))^2 + o(1)$,

где q — вероятность вырождения начинающегося с одной частицы ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с распределением (2) числа прямых потомков каждой частицы.





Теорема 2. Пусть $N \rightarrow \infty$. Тогда асимптотически почти наверное справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\tau > 2$, то $C = O(1/N)$.
- 2) если $\tau = 2$, то $C = O((\ln^2 N)/N)$.
- 3) если $0 < \tau < 2$, то $C = O(N^{(4-3\tau)/\tau})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formulae for the number of labelled regular graphs. — Eur. J. Comb., 1980, v. 2, p. 311–316.
2. Newman M. E. J. Modularity and community structure in networks. — PNAS, 2006, v. 103, is. 23, p. 8577–8583.
3. Hofstad R. Random Graphs and Complex Networks. V. 1. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2017, 337 pp.

Я. Е. Ромм, А. В. Березовой (Таганрог, Таганрогский ин-т им. А. П. Чехова (филиал), ФГБОУ ВО «РГЭУ (РИНХ)»). **Преобразование интерполяционного полинома Лагранжа для компьютерного вычисления интеграла.**

Приближенное вычисление интеграла в компьютерной реализации предполагается выполнять с максимальной точностью при условии минимизации временной сложности. Наиболее часто для этой цели используется кусочная интерполяция подынтегральной функции на основе интерполяции по Ньютону. Ниже излагается подход на основе преобразования полинома Лагранжа. Интеграл представляется суммой интегралов по подынтервалам равной длины:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx.$$

На каждом подынтервале подынтегральная функция интерполируется полиномом Лагранжа:

$$f(x) \approx \Psi_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \frac{(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_{j-1})(x-x_{j+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1) \cdots (x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1}) \cdots (x_j-x_n)}, \quad (1)$$

который априори преобразован к виду

$$\Psi_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \frac{(t-t_0)(t-t_1) \cdots (t-t_{j-1})(t-t_{j+1}) \cdots (t-t_n)}{(t_j-t_0)(t_j-t_1) \cdots (t_j-t_{j-1})(t_j-t_{j+1}) \cdots (t_j-t_n)}, \quad t = \frac{x-a_i}{h},$$

где

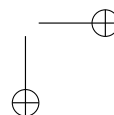
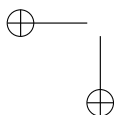
$$t_r = \begin{cases} r, & r < j; \\ r+1, & j \leq r \leq n-1, \end{cases} \quad h = \frac{a_{i+1}-a_i}{n}.$$

При этом числитель и знаменатель дроби в (1) переводятся в форму алгебраического полинома с целочисленными коэффициентами с помощью алгоритма, отличного от формул Виета [1]. Вычисление значения такого полинома принципиально снижает накопление погрешности по сравнению с исходной формой полинома с вещественными коэффициентами. Согласно преобразованию получится:

$$\Psi_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \frac{P_{jn}(t)}{P_{jn}(j)},$$

$$P_{jn}(t) = \sum_{\lambda=0}^n d_{\lambda j} t^\lambda, \quad t = \frac{x-a_i}{h},$$

где полиномы дроби имеют целочисленные коэффициенты.



Для наилучшего приближения подынтегральной функции с помощью элементарного алгоритма варьируется число подынтервалов N и степень полинома n . Первообразная от полинома в данной форме имеет аналитическое выражение. Вся схема без труда программируется.

Ниже даны выборочные результаты численного эксперимента, где ε — абсолютная погрешность вычисления интеграла от функции $f(x)$ на подынтервале длины h промежутка $[a, b]$, n — степень полинома:

$$f = \cos x; \quad n = 5, \quad a = 0, \quad h = 0,01, \quad b = 2,58; \quad \varepsilon = 9,76 \times 10^{-19};$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \quad n = 5, \quad a = 0, \quad h = 0,0001, \quad b = 0,58; \quad \varepsilon = 2,75 \times 10^{-21};$$

$$f = \sin x; \quad n = 2, \quad a = 0, \quad h = 0,0001, \quad b = 0,58; \quad \varepsilon = -5,42 \times 10^{-19};$$

Результаты эксперимента в целом показывают, что предложенный метод осуществляет приближенное вычисление определенного интеграла с точностью порядка не ниже 10^{-19} .

Минимизация временной сложности осуществляется за счет выбора минимального значения при достижении заданной границы абсолютной погрешности приближения подынтегральной функции. При этом все слагаемые полинома на всех подынтервалах могут вычисляться параллельно.

Вычисление тех же интегралов по формуле Симпсона выполнялось с существенно меньшей точностью. С меньшей точностью интеграл вычисляется, если аналогичную схему применить на основе полного приведения подобных в полиноме Ньютона [2], или в исходном представлении полинома Лагранжа [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ромм Я. Е. Локализация и устойчивое вычисление нулей многочлена на основе сортировки. II. — Кибернетика и системный анализ, 2007, № 2, с. 161–174.
2. Аксайская Л. Н. Разработка и исследование параллельных схем цифровой обработки сигналов на основе минимизации временной сложности вычисления функций. — Автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2008, 18 с.
3. Ромм Я. Е., Фирсова С. А. Минимизация временной сложности вычисления функций с приложением к цифровой обработке сигналов. Таганрог: Изд-во ТГПИ, 2008, 124 с.

А. Л. Талис, А. Л. Рабинович (Москва, ИНЭОС РАН; Петрозаводск, ИБ КарНЦ РАН). Некристаллографическая симметрия тетраблочных спиралей.

Симметрию линейной цепи из одинаковых правильных, объединенных по граням, тетраэдров можно отобразить с помощью тетраблока (объединения 4-х тетраэдров) [1, 2].

Тетраbloки можно объединять по торцевым граням 3 способами, различающимися углами поворота φ (по часовой стрелке в плоскости общей грани) одного тетраблока относительно другого ($\varphi = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$); если энантиоморфные тетраbloки одинаковой хиральности объединять единообразно, то можно получить 3 варианта «тетраблочных» спиралей (различающихся углами вращения θ).

При $\varphi = 0^\circ$ возникает (правая или левая) **спираль Бердийка–Коксетера** [3, с. 89] с иррациональным значением угла $\theta = 131,81 \dots^\circ$. Линейное объединение по торцевым граням при $\varphi = 0^\circ$ двух таких тетраблоков (имеющее 11 вершин) обладает группой симметрии, изоморфной проективной специальной линейной группе $\text{PSL}(2,11)$ порядка 660 [4, 5]. В итоге спираль Бердийка–Коксетера является «тетраблочной» спиралью, которая может быть получена объединением по торцевым граням при $\varphi = 0^\circ$ разных «идеальных» прототипов: либо тетраблоков (по 4 тетраэдра), либо пар тетраблоков (по 8 тетраэдров).

Спираль Бердийка–Коксетера из правильных тетраэдров не обладает трансляционной симметрией [3], но таковая возникает при искажениях тетраэдров, и минимальные искажения отвечают периоду в 8 тетраэдров [6, 7] (т. е. паре тетраблоков).

Подобный стержень из 8 слабо искаженных тетраэдров применяется при описании некоторых кристаллических структур [6] и полиморфных превращений в металлах [5].

При $\varphi = 120^\circ$ образуется **второй вариант** «тетраблочной» спирали. Если в каждом правильном тетраэдре этой тетраблочной спирали несколько изменить длины 2-х ребер из 6-ти (так, что разница со средним значением для каждого ребра составит величину $\sim 2\%$), то центры таких тетраблоков (вершины, в которых сходятся 6 ребер [1,2]) образуют спираль с осью 40/11 (угол $\theta = 99^\circ$) [8, 9].

Существует реальная макромолекулярная структура, обладающая близкими параметрами (ось вращения, отношение шага к радиусу): это α -спираль, являющаяся одним из самых общих элементов вторичной структуры в белках [10,11]. Экспериментальные структурные данные α -спирали [10] отвечают теоретической спирали с винтовой осью 40/11 [8, 9]. Число вершин на виток в идеальной спирали 40/11 равно 3,63(63); вершинам спирали 40/11 следует сопоставить в α -спирали атомы C_α , с которыми связаны аминокислотные остатки.

Ось α -спирали аппроксимировали в литературе осями: 18/5 (3,6 ост/виток), 11/3 (3,67 ост/виток), 15/4 (3,75 ост/виток) [12]; 7/2 (3,5 ост/виток) [13]; 41/11 (3,73 ост/виток) [14,15] и др. (см., например, [16]). Преимущества идеальной оси 40/11: она количественно воспроизводит экспериментальные характеристики α -спиралей [10,16] и «топологически согласована» с соседними спиралями [8, fig.7(b)], связана с симметриями «идеальных» спиралей 30/11 и 10/1 из политопа $\{3, 3, 5\}$: 4 последовательных оборота вокруг оси 40/11 совпадают с 3 последовательными оборотами вокруг оси 30/11 и с одним оборотом вокруг оси 10/1, т. е. $(40/11)^4 = (30/11)^3 = (10/1)^1$ [8].

Тetraблочную спираль с искажениями ребер $\sim 2\%$ при $\varphi = 120^\circ$ можно рассматривать как приближение идеального высокосимметричного образца α -спирали с осью 40/11.

При $\varphi = 240^\circ$ образуется **третий вариант** «тетраблочной» спирали. Если уменьшить длины 3-х ребер из 6 в каждом правильном тетраэдре до 0,951 от исходной длины ребра, то искажения ребер, как и в предыдущих случаях, оказываются незначительными, в среднем $\sim 2.5\%$, но данная тетраблочная спираль становится при этом частью известной структуры — «башни из пентагональных антипризм» [17, fig. 2]. Такая «башня» представляет собой объединение взаимопроникающих правильных икосаэдров с общей осью 5-го порядка. Центры двух соседних тетраблоков — это вершины пентагональной антипризмы, которые совмещаются при вращении на угол $\theta = (72^\circ + 72^\circ/2) = 108^\circ$ и трансляции вдоль оси башни. Угол $\theta = 108^\circ$ означает, что центры таких тетраблоков образуют спираль 10/3 [9]. Башня из пентагональных антипризм реализуется в кластерах Au-Ag, структуры которых основаны на 13-атомных центрированных икосаэдрах, объединенных по вершинам [18].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (гос. задание КарНЦ РАН №0218-2019-0076, №г.р. АААА-А17-117031710039-3 — для А.Л.Р.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович А. Л., Талис А. Л. Обзорение прикл. и промышл. матем., 2018, т. 25, в. 2, с. 186–187.
2. Талис А. Л., Рабинович А. Л. Кристаллография, 2019, 64, 3, с. 341–350.
3. Лорд Э., Маккей А., Ранганатан С. Новая геометрия для новых материалов. М.: Физматлит, 2010, 264 с.
4. Martin P., Singerman D. The geometry behind Galois' final theorem. — European J. Combin., 2012, v. 33, is. 7, p. 1619–1630.
5. Talis A., Kraposhin V. Acta Cryst. A., 2014, 70, p. 616–625.
6. Nyman H., Carroll C. E., Hyde B. G. Z. Kristallogr., 1991, 196, 1-4, p. 39–46.
7. Sadler G., Fang F., Kovacs J., Irwin K. arXiv:1302.1174v1 [math.MG], 2013.
8. Samoylovich M., Talis A. Acta Cryst. A., 2014, 70, p. 186–198.
9. Samoylovich M., Talis A. arXiv:1606.01237., 2016.
10. Kumar S., Bansal M. Biophys. J., 1998, 75, 10, p. 1935–1944.
11. Nelson D. L., Cox M. M. Lehninger Principles of Biochemistry. Freeman W.H. and Co.: N.Y., 2013.
12. Pauling L., Corey R. B., Branson H. R. Proc. Natl. Acad. Sci. USA., 1951, 37, 4, p. 205–211.
13. Crick F. H. C. Nature, 1952, 170, 4334, p. 882–883.
14. Sadoc J. F., Rivier N. Eur. Phys. J. B., 1999, 12, p. 309–318.
15. Sadoc J. F. Eur. Phys. J. E., 2001, 5, p. 575–582.
16. Hartmann M. D. et al. eLife, 2016, 5, e11861.
17. Lord E. A., Ranganathan S. Eur. Phys. J. D., 2001, 15, p. 335–343.
18. Teo B. K., Shi X., Zhang H. J. Am. Chem. Soc., 1991, 113, 11, p. 4329–4331.

А. Л. Талис, А. Л. Рабинович (Москва, ИНЭОС РАН; Петрозаводск, ИБ КарНЦ РАН). **Расслоение Хопфа для 4-мерного многогранника {240} и линейные тетракоординированные цепи.**

Многогранник (политоп) {240} — это конечный 4-мерный аналог алмазоподобной структуры, он содержит 240 вершин, которые принадлежат 3-мерному пространству постоянной положительной кривизны — сфере S^3 [1]. В каждой вершине этого 4-мерного многогранника сходятся 18 гексациклов в конформации «скрученная ванна», т.е. он обеспечивает плотнейшее из всех возможных тетракоординированное окружение каждой вершины [1]. Политоп {240} является объединением двух копий правильного 4-мерного многогранника, имеющего 120 вершин (политоп {3, 3, 5}) [1]; все вершины обеих копий лежат на одной и той же сфере, но при этом один многогранник повернут на определенный угол относительно другого.

Решение многих структурных задач требует отображения политоп {240} в 3-мерное евклидово пространство E^3 [1,2]. Сферу S^3 в евклидовом пространстве E^4 можно представить «базой» (сферой S^2 в пространстве E^3), каждой точке которой соответствует «слой» (окружность Вилларсо S^1 [1]); это представляет собой расслоение Хопфа [3]: $S^3 \rightarrow S^2$ (слой S^1).

В дискретном случае политоп {3, 3, 5} из множества точек сферы S^2 выбираются 12 вершин идеального икосаэдра, а на окружности Вилларсо, проходящей через вершину икосаэдра, размещается 10 вершин политоп; таким образом, каждая вершина базы нагружена слоем из 10 точек. Хотя база (икосаэдр) не принадлежит политопу {3, 3, 5}, но этот способ удобен для отображения политоп {3, 3, 5} в пространство E^3 . Треугольная грань икосаэдра соответствует $3 \cdot 10 = 30$ -вершинному геликоиду Коксетера, а 4 грани икосаэдра, охватывающие все его $4 \cdot 3 = 12$ вершин, дают картину расположения геликоидов Коксетера [5–8] в пространстве E^3 (картина является условной, так как для базы все 4 геликоида эквивалентны).

Известен [1] вариант отображения линейной подструктуры политопа $\{240\}$ в «канал» в E^3 ; стенки такого канала образованы гексациклами в конформации «скрученная ванна». Поскольку выбор подсистемы ребер из множества всех ребер политопа $\{240\}$ не является однозначным, возможны иные варианты выбора линейных подструктур политопа. Существует вариант, в котором совокупности вершин формируют не «каналы», а цепные последовательности; он представлен в настоящей работе.

Этот вариант позволяет охватить максимально возможное количество вершин политопа $\{240\}$. Он необходим, если вершины в итоговой системе должны быть разделены на два типа (условно, типы «С» и «Н»); иными словами, принадлежать тетракоординированным («углеводородно-подобным») цепям «типа $C_n H_{2n}$ ». В политопе $\{3, 3, 5\}$ максимальный порядок оси есть 30, т. е. в соответствующей цепи может быть только 30 вершин, связанных ребрами [7], поэтому в политопе $\{240\}$ в соответствующей этой оси тетракоординированной цепи может быть максимум 60 вершин, что ограничивает ее протяженность.

Нами показано, что в политопе $\{240\}$ можно выделить лишь три 60-вершинные «углеводородно-подобные» цепи типа $C_{20} H_{40}$, и при этом остаются еще 2 совокупности по 30 вершин, образующие при переходе в E^3 геликоиды Бердияка–Коксетера [7, 8]. Показано также, что разбиение такого типа является *единственным*.

Действительно, 60-вершинной «углеводородно-подобной» цепи типа $C_{20} H_{40}$ в политопе $\{240\}$ соответствует 6-вершинное объединение 2-х равнобедренных треугольников базы, которая представляет собой 24-вершинный усеченный октаэдр [4], см. рис. Поэтому расслоение Хопфа позволяет свести задачу к задаче охвата всех вершин *прямого* [9] икосаэдра минимальным количеством треугольников (в *прямом* икосаэдре 8 граней — это равносторонние треугольники, через центры которых проходят оси 3-го порядка, а остальные 12 граней — равнобедренные треугольники [9]). Охват оказывается возможным осуществить либо с помощью 4-х равносторонних треугольников, что соответствует варианту, рассмотренному в [1], и приводит к 4-м «каналам», либо с помощью 1-го равностороннего и 3-х равнобедренных треугольников, что и приводит к результату, указанному нами выше. В последнем случае три тетракоординированные цепи «типа $C_{20} H_{40}$ » скручены друг с другом, подобно геликоидам Бердияка–Коксетера.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (гос. задание КарНЦ РАН № 0218-2019-0076, № г.р. АААА-А17-117031710039-3 — для А.Л.Р.).

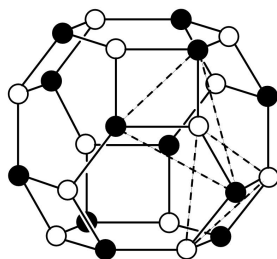


Рис. База расслоения Хопфа для политопа $\{240\}$ как объединение двух прямых икосаэдров (вершины которых показаны черными и белыми шарами, соответственно; центры всех шаров лежат на одной сфере S^2) в усеченный октаэдр (адаптировано из [4]). Штриховыми линиями выделены два равнобедренных треугольника базы («белый» и «черный»); объединение этих треугольников соответствует «углеводородно-подобной» цепи «типа $C_{20} H_{40}$ » в политопе $\{240\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mosseri R., DiVincenzo D. P., Sadoc J. F., Brodsky M. H. Polytope model and the electronic and structural properties of amorphous semiconductors. — Phys. Rev. B, 1985, v. B32, № 6, p. 3974–4000.
2. Ishii Y. Propagating local positional order in tetrahedrally bonded system. — Acta Crystallogr. Sect. A, 1988, v. 44, part 6, p. 987–998.
3. Sadoc F. J. Eur. Phys. J. E., 2001, 5, p. 575–582.
4. Samoylovich M., Talis A. Acta Cryst. A., 2014, 70, p. 186–198.
5. Lord E. A., Ranganathan S. Eur. Phys. J. D., 2001, 15, p. 335–343.
6. Lord E. A. Struct. Chem., 2002, 13, 3-4, p. 305–314.
7. Coxeter H. S. M. Regular Polytopes. N.Y.: Dover Publ., 1973, 321 p.
8. Boerdijk A. H. Philips Res. Rep., 1952, 7, p. 303–313.
9. Галиулин P. B. Материаловедение, 1999, 6, с. 2–5.

Ю. О. Трусова, Д. М. Мурашов, В. Н. Белоозеров (Москва, ФИЦ ИУ РАН). **Онтологическая поддержка анализа изображений произведений живописи**¹⁰⁾.

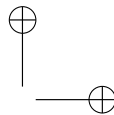
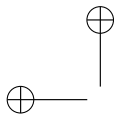
Разработка специализированных компьютерных методов и программных средств обработки и анализа изображений является важнейшим научным направлением в области реставрации, атрибуции и консервации предметов культурного наследия, в т. ч., произведений живописи.

Основанием для подготовки заключения о состоянии картины и задания на её реставрацию и/или заключения об авторстве, месте и времени создания, принадлежности художественной школе (атрибуция), является технико-технологическое описание, которое формируется в процессе разносторонних исследований, в т. ч. по результатам анализа изображений картин, полученных фотосъемкой и спецсъемкой (в прямом и боковом свете, в УФ-, ИК- и рентген-диапазонах, фотосъемка фрагментов картины с высоким разрешением).

Описываемые в данной работе исследования выполняются в рамках продолжающегося проекта, основной целью которого является разработка программной системы, которая позволит проводить большинство видов технико-технологических исследований с помощью одного программного средства, установленного на рабочем месте эксперта. Такая система должна включать средства работы с изображениями для разных видов исследований, обеспечивать хранение большого объема информации и данных, обладать широкими поисковыми возможностями, а также возможностями автоматизированного интеллектуального анализа данных.

Одним из важных этапов разработки предлагаемой системы является решение задачи накопления и структурирования данных исследований и знаний, которыми обладают искусствоведы и реставраторы с большим опытом работы, а также знаний о современных методах обработки и анализа изображений произведений живописи. Для удобной с точки зрения пользователя работы с системой и эффективного функционирования ее компонент решено разработать набор онтологий как для описания самой системы (ее компонент и отношений между ними), так и для описания всех типов данных и знаний, которые в ней хранятся и используются (микроскопические изображения произведений живописи, технико-технологические описания картин, справочные данные по реставрации и атрибуции и др. информация, используемая специалистами для принятия решений).

¹⁰⁾ От Редакции. По решению Оргбюро ВСПИМ данный доклад был включен в научную программу в качестве приглашенного пленарного доклада.



При построении основной онтологии OntArt была использована разработанная Комитетом по документации международного совета музеев модель CIDOC CRM, которая была расширена посредством добавления новых классов, связанных с реставрацией и атрибуцией живописи. В качестве источника классов понятий использован разработанный авторами ранее тезаурус TheArt [1].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-07-01385).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мурашов Д. М., Трусова Ю. О., Белоозеров В. Н. и др.* Тезаурус по реставрации и атрибуции произведений станковой масляной живописи «TheArt». — Научно-техническая информация. Серия 1, 2018, в. 2, с. 30–35.

И. А. Чеплюкова (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **О максимальной степени вершины в конфигурационном графе с ограниченным числом ребер.**

Конфигурационные графы, впервые введенные в статье [1], получили широкое применение в качестве моделей сложных сетей коммуникаций таких, как Интернет, сети мобильной связи, транспортные, социальные сети и многие другие.

В работе рассматривается случайный конфигурационный граф с N вершинами, у которого степени вершин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с произвольным распределением, удовлетворяющим следующему соотношению: при $k \rightarrow \infty$

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi_i = k\} \sim \frac{d}{k^g (\ln k)^h},$$

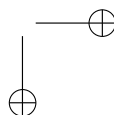
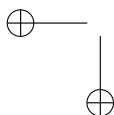
где $i = 1, \dots, N$, $d > 0$, $g > 1$, $h \geq 0$. Впервые эти графы исследовались в статье [2]. В данной работе рассматривается подмножество таких графов при условии, что сумма степеней вершин графа ограничена сверху: $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N \leq n$. Найдены предельные распределения максимальной степени вершины графа $\eta_{(N)}$ при $n, N \rightarrow \infty$. Приведем один из полученных результатов.

Введем обозначения

$$B_N = \begin{cases} (N(g-1)^h / \ln^h N)^{1/(g-1)}, & 1 < g < 3; \\ \sqrt{N \ln^{1-h} N}, & g = 3, h < 1; \\ \sqrt{N \ln \ln N}, & g = 3, h = 1; \\ \sigma \sqrt{N}, & g > 3 \text{ или } g = 3, h > 1, \end{cases}$$

$$m = \mathbf{E} \xi_1,$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D} \xi_1.$$



Теорема. Пусть $n, N \rightarrow \infty$, $g > 2$,

$$\frac{n - mN}{B_N} \geq -C > -\infty,$$

$$r = \sqrt[g-1]{\frac{Nd(g-1)}{\gamma \ln^h N}} (1 + o(1)),$$

где γ и C — некоторые положительные постоянные. Тогда

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leq r\} = e^{-\gamma}(1 + o(1)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. — Eur. J. Combin., 1980, v. 1, is. 4, p. 311–316.
2. Павлов Ю. Л. Условные конфигурационные графы со случайным параметром степенного распределения степеней. — Матем. сб., 2018, т. 209, в. 2, с. 120–137.

А. Л. Я к о в и в (Москва, МИАН). **Объем наибольшей компоненты случайного A -отображения**¹¹⁾.

Пусть $\mathfrak{S}_n$ — полугруппа отображений множества X из n элементов в себя. Рассматривается совокупность $\mathfrak{S}_n(A)$ отображений из $\mathfrak{S}_n$, объемы контуров которых принадлежат множеству $A \subseteq N$. Такие отображения называются A -отображениями (см., например, книги [13, 14, 15]). Пусть случайное отображение τ_n имеет на множестве $\mathfrak{S}_n(A)$ параметрическое распределение, согласно которому

$$\mathbf{P}\{\tau_n = \omega(\cdot)\} = \frac{\vartheta_1^{u_1} \dots \vartheta_n^{u_n}}{H_n(\vartheta)};$$

$$H_n(\vartheta) = n! \operatorname{coef}_{z^n} \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i m_i \vartheta_i}{i!} \right\}.$$

Здесь $\omega(\cdot)$ — произвольное фиксированное отображение из $\mathfrak{S}_n(A)$, u_i — число компонент объема i этого отображения, $\{\vartheta_i, i \in N\}$ — некоторые неотрицательные параметры, называемые весами компонент объема i отображения $\omega(\cdot)$, а $m_i = m_i(A)$ — число отображений из $\mathfrak{S}_i(A)$, имеющих одну компоненту связности. Мы применили здесь общую формулу (6) из работы [8], краткие сообщения об этом результате даны в [6, 7].

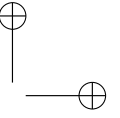
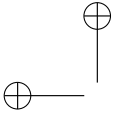
Пусть с. в $\mu_m(n)$ — m -й максимум объемов компонент этого случайного отображения (m -й член справа вариационного ряда объемов его компонент). Положим при $x > 0$, $\sigma > 0$ и $m \in N$

$$\Phi_{\sigma m}(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=m}^{[1/x]} \frac{(-1)^{k-m} \sigma^k}{k(m-1)!(k-m)!} J_{\sigma k}(x) & \text{при } x < m^{-1}, \\ 1 & \text{при } x \geq m^{-1}; \end{cases}$$

$$J_{\sigma k}(x) = \int_{V_k(x)} (1 - y_1 - \dots - y_k)^{\sigma-1} \frac{dy_1 \dots dy_k}{y_1 \dots y_k},$$

$$V_k(x) = \left\{ y = (y_1, \dots, y_k) \in R^k, \sum_{j=1}^k y_j \leq 1, y_j \geq x \ \forall j = 1, \dots, k \right\}.$$

¹¹⁾ От Редакции. По решению Оргкомитета данный доклад был включен в научную программу в качестве приглашенного пленарного доклада.



Зафиксируем произвольное множество $D \subseteq N$. Мы будем предполагать, что

$$\vartheta_n \rightarrow \begin{cases} \vartheta > 0, & n \in D, \\ 0, & n \in N \setminus D, \end{cases}$$

Справедлива следующая предельная теорема.

Теорема. Пусть множество A имеет положительную асимптотическую плотность ϱ во множестве натуральных чисел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k : k \in A, k \leq n|}{n} = \varrho > 0. \quad (1)$$

Предположим также, что

$$p(n) \equiv \text{coef}_{z^n} \exp \left\{ \sum_{i \in D} \frac{z^i \vartheta \varrho}{2i} \right\} = n^{\sigma-1} L(n), \quad (2)$$

где последовательность $L(n)$ медленно меняется на бесконечности [16], причем $\sigma > 0$.

Тогда для произвольных фиксированных $m \in N$ и $x \in [0, 1]$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\mu_m(n)}{n} \leq x \right\} \rightarrow \Phi_{\sigma, m}(x) \quad (n \rightarrow \infty).$$

При этом асимптотическая плотность множества D во множестве натуральных чисел существует и равна $2\sigma/(\vartheta \varrho)$.

В статье [20] приводится широкий класс примеров множеств A , имеющих положительную асимптотическую плотность во множестве натуральных чисел, т.е. удовлетворяющих (1). Потому приведем только примеры множеств D , удовлетворяющих (2).

Пример 1. Пусть множество D — случайно, причем случайные величины

$$\xi_n = \chi\{n \in D\}, \quad n \in N$$

независимы в совокупности и

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} \rightarrow \rho > 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in B$$

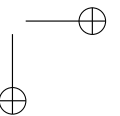
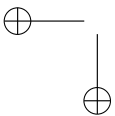
для некоторого множества $B \subseteq N$ асимптотической плотности 1. Тогда при всех ϑ, ϱ соотношение (2) выполнено для D почти наверное (п.н.) и, стало быть,

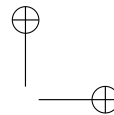
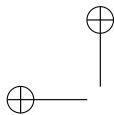
$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\mu_m(n)}{n} \leq x \mid D \right\} \rightarrow \Phi_{\sigma m}(x) \quad \text{п.н.}$$

Пример 2. Пусть заданы произвольное конечное объединение Δ отрезков из $[0, 1]$ и функция $g(t) = t^\alpha l(t)$, $\forall t > 0$, где функция $l(t)$ медленно меняется на бесконечности [16], а число α — положительное и нецелое. Мы будем включать число $n \in N$ в множество A тогда и только тогда, когда $\{g(n)\} \in \Delta$. Если для произвольного $m = 1, 2, \dots, [\alpha] + 3$

$$\frac{d^m}{dt^m} l(t) = o\left(\frac{l(t)}{t^m}\right) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

то для множества D выполнено соотношение (2) при всех ϑ, ϱ и, стало быть, справедлива теорема.





Как в примере 1, так и в примере 2

$$\sigma = \rho \frac{\vartheta}{2},$$

где ρ — плотность множества D , причем ρ в примере 2 есть сумма длин составляющих Δ отрезков.

Отметим, что первыми были введены и исследованы в некоторых конкретных ситуациях более общие объекты — отображения с ограничениями на контур и высоту в работах [11, 12] (1972, 1973) — так называемые AB -отображения. Асимптотические свойства различных характеристик случайных A -отображений исследованы в статьях [19–23].

Отметим также, что случайные отображения с ограничениями на объемы компонент недавно были рассмотрены в работах [17, 18]. Если в исследованной нами модели случайного отображения положить

$$\theta_i = \chi\{i \in D\},$$

то мы приходим к классу отображений с ограничениями на объемы компонент и объемы контуров. При этом получим случайное отображение с равномерным распределением на этом классе. Поэтому, полагая поочередно

$$A = N \quad \text{и} \quad D = N,$$

мы приходим к моделям, рассмотренным в упомянутых работах [17, 18] и [19–23] соответственно. Однако, экстремальные задачи в этих работах не исследовались.

Экстремальные свойства случайных подстановок, случайных отображений и других комбинаторных структур явились предметом пристального внимания со стороны целого ряда авторов, начиная с основополагающей работы [2] (1944). Более подробные ссылки и история вопроса даны в статьях [4, 5], см. также монографию [9], где изложена соответствующая теория экстремумов для подстановок и общих случайных отображений и даны библиографические комментарии к ней до конца 1984 г. В частности, в [9] доказана предельная теорема для максимального объема случайного отображения, равномерно распределенного на $\mathfrak{S}_n$. В монографии [1] рассматриваются случайные ансамбли, для которых

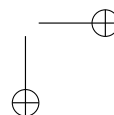
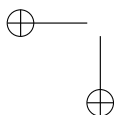
$$\vartheta_i \rightarrow \theta > 0 \quad (i \rightarrow \infty).$$

Здесь, в частности, получены интегральная и локальная предельные теоремы. Аналогичный результат для случайных отображений получен в более ранней работе [3]. Как в [1], так и в [3] имеется обширная библиография по данной тематике.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00111).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arratia R., Barbour A. D., Tavaré S. Logarithmic Combinatorial Structures: A Probabilistic Approach (2003), European Mathematical Society.
2. Гончаров В. Л. Из области комбинаторики. — Изв. АН СССР, сер. матем. 1944, т. 8, с. 3–48.
3. Donnelly P. J., Ewens W. J., Padmadisastra S. Functionals of random mappings: exact and asymptotic results. — Adv. in Appl. Probab., 1991, 23, № 3, с. 437–455.
4. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. О случайных подстановках. Труды по дискретной математике. Т. 5. М.: Физматлит, 2002, с. 73–92.
5. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Метод В. Л. Гончарова и его развитие в анализе различных моделей случайных подстановок. — Теория вероятн. и ее примен., 2002, т. 47, № 3, с. 558–566.



6. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Неравновероятные меры на множествах разложимых комбинаторных объектов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 2, с. 348–349.
7. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Случайные комбинаторные объекты. — Доклады РАН, 2004, т. 396, № 2, с. 151–154.
8. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Случайные комбинаторные объекты в общей параметрической модели. — Труды по дискретной математике. Т. 10. М.: Физматлит, 2007, с. 73–86.
9. *Колчин В. Ф.* Случайные отображения. М.: Наука, 1984.
10. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. М.: Физматлит, 2000.
11. *Сачков В. Н.* Отображения конечного множества с ограничениями на контур и высоту. — Теория вероятн. и ее примен., 1972, т. 17, № 4, с. 679–694.
12. *Сачков В. Н.* Случайные отображения ограниченной высоты. — Теория вероятн. и ее примен., 1973, т. 18, № 1, с. 122–132.
13. *Сачков В. Н.* Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.
14. *Сачков В. Н.* Вероятностные методы в комбинаторном анализе. М.: Наука, 1978.
15. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
16. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
17. *Тимашёв А. Н.* Случайные компоненты в обобщенной схеме размещения. М.: Академия, 2017.
18. *Тимашёв А. Н.* Случайные отображения с объемами компонент из заданного множества. — Теория вероятн. и ее примен., 2019, т. 64, в. 3, с. 599–610.
19. *Якимив А. Л.* О числе А-отображений. — Матем. заметки, 2009, т. 86, в. 1, с. 139–147.
20. *Якимив А. Л.* О числе циклических точек случайного А-отображения. — Дискрет. матем., 2013, т. 25, т. 3, с. 116–127.
21. *Якимив А. Л.* О числе компонент случайного А-отображения. — Теория вероятн. и ее примен., 2014, т. 59, в. 1, с. 81–96.
22. *Якимив А. Л.* О числе компонент фиксированного объема случайного А-отображения. — Матем. заметки, 2015, т. 97, в. 3, с. 462–470.
23. *Якимив А. Л.* Предельная теорема для логарифма порядка случайного А-отображения. — Дискрет. матем., 2017, т. 29, в. 1, с. 136–155.

Научная программа симпозиума

- | | | |
|--|---|---|
| Б1. Безопасность компьютерных систем. | Б13. Медицина. | Б28. Системы поддержки принятия решений для регионального управления. |
| Б2. Геометрическая нелинейная оптика. | Б14. Метод конечных элементов. | Б29. Социология. Психология. |
| Б3. Инженерно-технологическая математика. | Б15. Механика жидкости и газа. | Б30. Специальные функции и ортогональные многочлены. |
| Б4. Информационные технологии и задачи связи. | Б16. Механика природных процессов. | Б31. Супер-, нейро-, биокомпьютеры. Эволюционные и мембранные вычисления. |
| Б5. Квантовые вычисления. | Б17. Механика разрушения. | Б32. Теория управления и системные исследования. |
| Б6. Математические модели для биологических и экологических систем. | Б18. Модели горения и взрыва. | Б33. Тепло- и массоперенос. |
| Б7. Математические модели для жидких кристаллов. | Б19. Нанотехнологии: математические модели. | Б34. Физика океана и атмосферы. |
| Б8. Математические методы в педагогических исследованиях. | Б20. Науки о Земле, геология, геофизика. | Б35. Фракталы и масштабный эффект. |
| Б9. Математические модели в теории оболочек. | Б21. Неклассические задачи для уравнений математической физики. | Б36. Экономика, страховая и финансовая математика. |
| Б10. Математическое моделирование процессов рассеяния примесей в турбулентной атмосфере. | Б22. Некорректные, обратные и условно корректные задачи. | Б37. Энергетика и передача энергии. |
| Б11. Математическое моделирование свойств материалов и конструкций. | Б23. Нелинейное моделирование и управление. | Б38. Юриспруденция. Криминалистика. |
| Б12. Математическое образование. | Б24. Обработка данных, анализ и обработка изображений. | Б39. История российской прикладной математики. |
| | Б25. Прикладная вероятность и статистика. | Б40. Математика чрезвычайных ситуаций. |
| | Б26. Прикладная геометрия. Обработка и распознавание образов. | |
| | Б27. Прикладная дискретная математика. Обработка и защита информации. | |

ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 26 МАТЕМАТИКИ Выпуск 3
2019

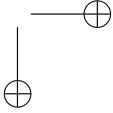
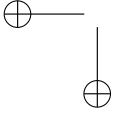
ДВАДЦАТЫЙ
ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ
(ОСЕННЯЯ ОТКРЫТАЯ СЕССИЯ)

22 сентября — 6 октября 2019 г.
г. Сочи

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ
Часть II

Под редакцией *И. А. Соколова*,
А. К. Горшенина, *А. Р. Симоняна*, *В. И. Хозлова*

МОСКВА • «ОП и ПМ» • 2019



**XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ**
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

**ОРГАНИЗАТОРЫ И СПОНСОРЫ
СИМПОЗИУМА**

- Управление по науке и образованию Администрации г. Сочи
- Сочинский государственный университет, в т. ч.
 - инженерно-экологический факультет
- Сочинский научно-исследовательский центр РАН
- Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии наук
- Академия криптографии Российской Федерации
- Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова*;
- Редакции журналов: «Информатика и ее применения»; «Обозрение прикладной и промышленной математики» (ОПиПМ); «Прикладная информатика»; «Теория вероятностей и ее применения» (Научное издательство «ТВП»)
- Российский национальный комитет по индустриальной и прикладной математике
- Российский Фонд фундаментальных исследований**

(* В стадии согласования.)

** Симпозиум поддержан грантом РФФИ № 19-07-20019.

Объединенный Оргкомитет симпозиума

Академик И. А. Соколов (председатель),
академик В. А. Бабешко, академик А. А. Боровков, академик Ю. Г. Евтушенко,
академик А. Б. Жижченко, академик И. А. Ибрагимов, академик Б. С. Кашин,
академик В. И. Колесников, академик С. В. Кисляков, академик А. Б. Куржанский,
академик В. П. Маслов, академик В. А. Сойфер, академик Б. Н. Четверушкин,
академик А. Н. Ширяев, академик В. П. Шорин,
член-корр. Д. А. Губайдуллин, член-корр. А. В. Ильин, член-корр. А. Ф. Титов,
Ю. Б. Бутин, А. Н. Волков, Л. Ф. Выюненко, В. У. Галустов, А. К. Горшенин,
В. И. Дементьева, А. С. Дудов, А. М. Зубков, С. А. Корниенко, А. А. Левицкая, А. А. Лиховид,
О. Н. Медведева, Ю. М. Окунев*, О. О. Рыбак, А. Р. Симонян, Г. В. Слюсарев, В. И. Хохлов,
А. Б. Чернышев, А. Ф. Чипига, С. Я. Шоргин, Э. Г. Янукян

**Оргбюро Всероссийских симпозиумов
по прикладной и промышленной математике**

Академик И. А. Соколов (председатель),
В. И. Хохлов (зам. председателя),
В. И. Астафьев, Г. И. Белявский, Л. Ф. Выюненко, Л. И. Герасимова (секретарь),
В. В. Мазалов, А. Р. Симонян, Е. И. Улитина

Локальный Оргкомитет

А. Р. Симонян (председатель), Е. И. Улитина (ученый секретарь),
А. В. Волков, С. Ж. Симаворян

НАУЧНАЯ ПРОГРАММА СИМПОЗИУМА (список минисимпозиумов) опубликована на с. 286.

**XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ**
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

**Научные доклады
осенней открытой сессии XX Всероссийского симпозиума
по прикладной и промышленной математике**

<i>Белявский Г. И., Гирченко М. А., Данилова Н. В.</i> Вычисление вероятности невыхода случайного процесса из полосы	256
<i>Высотина В. Г.</i> Особенности структуры закрученного по закону твердого тела (вынужденный вихрь) течения воздуха в длинной трубе	257
<i>Данилова Н. В., Землякова И. А.</i> Некоторые задачи оптимального управления с разладкой	260
<i>Зайчикова Н. А., Федоренко Р. В.</i> Моделирование экспорта региона Российской Федерации на основе эконометрического подхода	262
<i>Захарова Т. В.</i> Обратные задачи магнитоэнцефалографии	264
<i>Зотов В. А.</i> Истечение жидкости из перевернутых конусов	266
<i>Калинкин А. В., Кудряшев С. С.</i> Вероятности вырождения марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T_1 \rightarrow T_1 + T_2, 2T_2$	267
<i>Кириухин В. А.</i> Атака методом бумеранга на связанных ключах на 5 раундов шифра Кузнечик	269
<i>Котельников В. П.</i> Метод определения числовых характеристик произведения нескольких коррелированных случайных величин	271
<i>Круглова С. И., Мельников С. Ю., Сидоров Е. С.</i> Способ совместного выбора параметров метода импосторов в открытой задаче идентификации авторства текста (русский язык)	272
<i>Лери М. М.</i> О модулярности конфигурационных графов	275
<i>Осипов Г. С., Осипова Е. В.</i> О решении обратных задач с нечеткими соответствиями	276
<i>Переходцева Э. В.</i> Развитие гидродинамико-статистических моделей прогноза сильного и опасного летнего ветра и сильных полусуточных летних осадков для территории Урала, Западной и Средней Сибири	278
<i>Рабинович А. Л., Талис А. Л.</i> Отображение некристаллографической симметрии фосфолипидов биологических мембран: семейства w3 и w6 углеводородных жирнокислотных цепей.	281
<i>Соколов Н. А., Хрусталева О. Е.</i> Имитационные модели механизма управления инновационным развитием	282
<i>Тырсин А. Н.</i> Вероятностно-энтропийная концепция устойчивого развития сложных систем	285

**XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ**
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

Г. И. Белявский, М. А. Гирченко, Н. В. Данилова (Ростов-на-Дону, Южный федеральный университет). **Вычисление вероятности невыхода случайного процесса из полосы.**

Рассматривается случайный процесс, подчиняющийся стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX_t = f(X_t) dt + \varphi(X_t) dW_t$$

на конечном интервале $[0, T]$, с начальным значением X_0 , и коэффициентами, удовлетворяющими условию Липшица:

$$|f(x) - f(y)| + |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|,$$

гарантирующие существование и единственность сильного решения уравнения. Кроме этого предполагается, что $\varphi(x) > 0$. Во многих приложениях необходимо на траекториях решения уравнения вычислять математическое ожидание $\mathbf{M} I_{\{(\bar{X}_T < b) \wedge (\underline{X}_T > a)\}}$. Процессы $\bar{X}$ и $\underline{X}$ — супремумный и инфимумный процессы соответственно. Поскольку аналитического решения данной задачи в большинстве случаев не существует, то необходимо использовать численные методы.

Одно из возможных направлений получения численного метода — это применение метода Монте-Карло. Метод Монте-Карло предполагает воспроизведение траектории решения уравнения, вычисления $I_{\{(\bar{X}_T < b) \wedge (\underline{X}_T > a)\}}$ с последующим усреднением по траекториям. Численные методы решения стохастического дифференциального уравнения предполагают воспроизведение траектории при помощи дискретного множества точек $\{(\tau_i, X_i^\delta) : i = 1, 2, \dots, n\}$, связанного с разбиением интервала $[0, T]$ на n частей: $0 = \tau_0 < \dots < \tau_n = T$, с $\delta = \max(\tau_i - \tau_{i-1})$, которые приближенно равны соответствующим точкам $\{(\tau_i, X_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ на траектории решения дифференциального уравнения $(X_i = X_{\tau_i})$. Отметим, что близость точек (τ_i, X_i^δ) и (τ_i, X_i) , которая обычно достигается, не гарантирует близость $\bar{X}_n^\delta$ и $\bar{X}_T$, $\underline{X}_n^\delta$ и $\underline{X}_T$. В этом заключается основная проблема использования классического метода Монте-Карло для решения рассматриваемой в докладе задачи.

В предлагаемых методах рассматривается рандомизированное разбиение интервала $[0, T]$. В первом методе используется рандомизированное разбиение Карра, которое позволяет использовать факторизацию Винера–Хопфа при вычислении $\mathbf{M} I_{\{(\bar{X}_T < b) \wedge (\underline{X}_T > a)\}}$. Во втором методе разбиение осуществляется моментами остановки, связанными с винеровским процессом, при этом для вычисления $\mathbf{M} I_{\{(\bar{X}_T < b) \wedge (\underline{X}_T > a)\}}$ используется преобразование Гирсанова.

В докладе приводятся результаты вычислительных экспериментов и обсуждаются достоинства и недостатки предложенных вычислительных методов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-9-01038).

В. Г. Высотина (Москва, ОПИПМ). Особенности структуры закрученного по закону твердого тела (вынужденный вихрь) течения воздуха в длинной трубе.

В работе представлены результаты изучения влияния такого типа закрутки на входе в трубу, как задание во входном сечении закрутки по закону твердого тела (вынужденный вихрь), на структуру течения воздуха в длинной трубе. При всех прочих равных условиях для трех разных значений отношения давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980, 0,970$ получены решения со структурой, содержащей распад вихря в виде тороидальной зоны отрыва, обтекаемой закрученным основным потоком. Для расчетов использовался метод Годунова.

Постановка задачи опубликована в [4]. Результаты изучения распада вихря в прямой трубе методом Годунова [1–3] для постоянного во входном сечении угла закрутки $\alpha (\text{tg}(\alpha) = \text{const})$ представлено частично в [5–7], там же представлено сравнение с опытными данными [4].

Моделирование закрученного течения воздуха выполнялось в осесимметричной трубе длиной 1 метр с радиусом 0,04 м [4]. Использована разностная сетка равномерная по длине N и сгущающаяся к оси и внешнему обводу M , состоящая из 201×21 узлов.

Расчеты течения воздуха проведены для отношений давлений

$$\frac{P_{\text{вых}}}{P_0} = 0,990, 0,980, 0,970.$$

Во входном сечении задавалась закрутка потока по закону твердого тела в диапазоне углов $\alpha = 10^\circ \div 87^\circ$. Использованы следующие параметры торможения:

$$P_0 = 100500,8 \text{ Па}, \quad \rho_0 = 1,1945 \text{ кг/м}^3, \quad \kappa = 1,4,$$

$$R_G = 287,15 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}^\circ}, \quad Re \approx 10^4 \div 10^5.$$

На входе в канал задавался вид закрутки $C_n * \text{tg}(\alpha) * r_i / R$ — для вынужденного вихря. Здесь α — угол закрутки ($\alpha = 10^\circ \div 87^\circ$), R — радиус внешнего обвода трубы, r_i — текущий радиус ($r_i = r_1 \div R = r_M$; $i = 1 \div MI$, $MI = 20$, $M = 21$), C_n — нормальная к входному сечению скорость, $\text{tg}(\alpha)$ — тангенс угла α .

Графики профиля окружной составляющей скорости для угла закрутки $\alpha = 10^\circ$, соответствующие каждому значению отношения давлений $P_{\text{вых}}/P_0$ показаны на рис. 1.

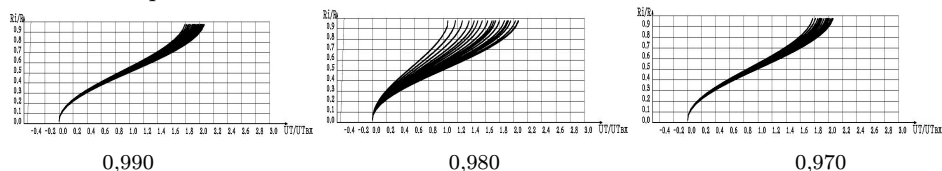


Рис. 1. Графики $U_T/U_{Z_{\text{вх}}}$ для угла закрутки $\alpha = 10^\circ$, в сечениях 1–200 с шагом 10.

Вид закрутки $C_n * \text{tg}(\alpha) r_i / R$. Отношение давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980, 0,970$

Профили окружных скоростей соответствуют закрутке по закону твердого тела.

Графики изменения расхода для каждого значения $P_{\text{вых}}/P_0$ в зависимости от угла закрутки α приведены на рис. 2.

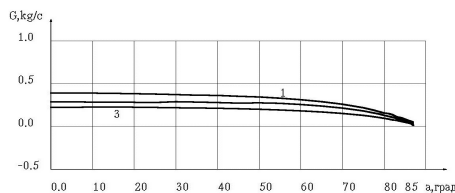


Рис. 2. Расход воздуха в зависимости от угла закрутки на входе α . Вид закрутки $C_n * \operatorname{tg}(\alpha) r_i / R$. Отношение давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990(3), 0,980, 0,970(1)$

Течение при вынужденном вихре не имеет случаев отрицательного расхода. Поведение потока при всех прочих равных условиях для трех значений отношения давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980, 0,970$ при задании закрутки во входном сечении в виде вынужденного вихря — $(C_n * \operatorname{tg}(\alpha) * r_i / R)$, похожее: в зависимости от изменения угла α всегда имеем положительный расход и три варианта структур течения. 1) $\alpha = 10^\circ \div 78^\circ$ — закрученное течение без особенностей. На рис. 3 — изменение полей скоростей в диапазоне углов от $\alpha = 20^\circ$ до 79° для $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990$. Аналогичная картина полей скоростей имеет место быть для $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,980$ и $0,970$.

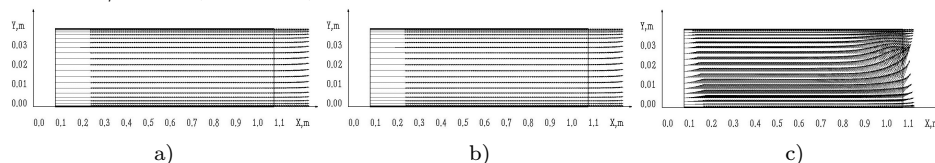


Рис. 3. Поля скоростей: а) $\alpha = 20^\circ$, б) $\alpha = 45^\circ$, в) $\alpha = 79^\circ$. Отношение давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990$

Профили окружных составляющих скорости для $\alpha = 70^\circ$ показаны на рис. 4.

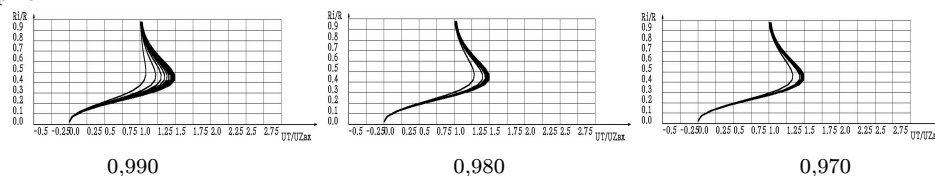


Рис. 4. Профили окружных скоростей для $\alpha = 70^\circ$. Отношение давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980, 0,970$

Профили окружных скоростей при $\alpha = 70^\circ$ не соответствуют закону твердого тела. 2) При углах $\alpha = 80^\circ \div 82^\circ$ происходит перестройка течения. На рис. 5 — поля скоростей для угла $\alpha = 80^\circ$.

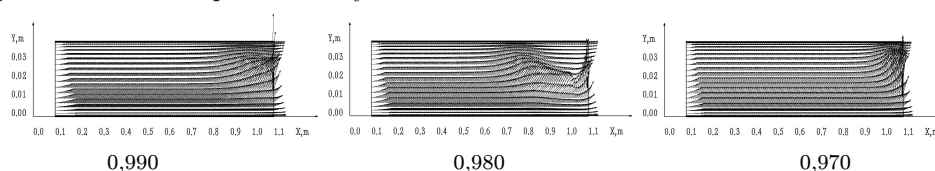


Рис. 5. Поля скоростей: а) $\alpha = 80^\circ$ Отношение давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980, 0,970$

В выходном сечении при $\alpha = 80^\circ$ и всех трех значениях $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980$ и $0,970$ имеет место наличие диска тороидальной формы. Фрагменты выходного сечения поля скоростей для $\alpha = 80^\circ$ показаны на рис.6.

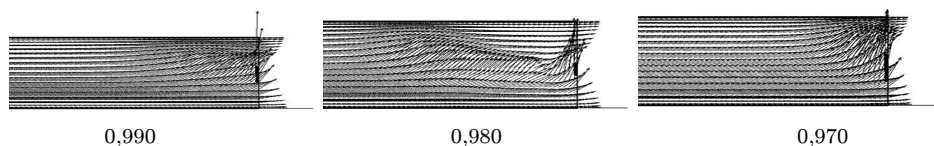


Рис. 6. Фрагменты полей скоростей для $\alpha = 80^\circ$. Отношение давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980, 0,970$

3) Для всех трех значений отношения давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980$ и $0,970$ при $\alpha = 83^\circ \div 87^\circ$ имеет место распад вихря в виде закрученного течения с замкнутой тороидальной зоной ("bagel"). С увеличением угла закрутки тороидальная зона уменьшается в продольных размерах и увеличивается по высоте. Поведение течения при $\alpha = 85^\circ$ для $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980$ и $0,970$ показано на рис. 7.

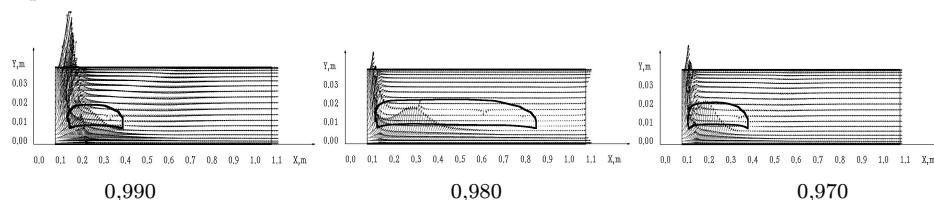


Рис. 7. Поля скоростей: а) $\alpha = 85^\circ$. Отношение давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980, 0,970$

В работе получены и представлены для вида закрутки по закону твердого тела ($C_n * \text{tg}(\alpha) * r_i/R$), заданного во входном сечении канала, поля скоростей и их фрагменты — структура течений и границы зон отрыва для трех значений отношения давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980$ и $0,970$. Поведение потока при всех прочих равных условиях одинаковое. Поля скоростей и распределение параметров (профили относительных окружных и осевых скоростей, давлений, изменение расхода в зависимости от величины угла и т. д.) похожие. Для вынужденного вихря (закон вращения твердого тела) закрутка задается в виде — $C_n * \text{tg}(\alpha) * r_i/R$. При $\alpha = 80^\circ$ имеет место диск тороидальной формы в выходном сечении канала. Для всех трех значений отношения давлений $P_{\text{вых}}/P_0 = 0,990, 0,980$ и $0,970$ при $\alpha = 83^\circ$ впервые появляется замкнутая зона на возвратного течения, имеющая форму тора ("bagel"), — рис. 7. Тороидальная зона отрыва имеется также при углах закрутки $\alpha = 84^\circ \div 87^\circ$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 3, с. 1020–1050.
2. Дорфман Л. А. Численные методы в газодинамике турбомашин. Л.: Энергия, 1974.
3. Высотина В. Г. Моделирование течения невязкого газа в осесимметричных каналах с поворотом потока на 180 и 540 градусов. — Математическое моделирование, 1996, т. 8, № 10, с. 25–34.

4. *Uchida S., Nakamura Y., Ohsawa M.* Experiments on the axisymmetric vortex breakdown in a swirling air flow. — Trans. Japan Soc. Aeronaut. Space Sci., 1985, v. 27, № 78, p. 206–216.
5. *Высотина В. Г.* Изменение локальных параметров потока воздуха при распаде вихря в трубе. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2015, т. 22, в. 4, с. 450–454.
6. *Высотина В. Г.* Численное исследование влияния отношений давлений на осесимметричный распад вихря в трубе методом Годунова. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2012, т. 19, в. 2, с. 242–244.
7. *Высотина В. Г.* Численное исследование структур распада вихря в длинной трубе. — Международная научная конференция по механике «Восьмые Поляховские чтения», 30 января–2 февраля 2018 г. Санкт-Петербург, Россия. Сборник тезисов, с. 103.
8. *Гупта А., Лилли Д., Сайред Н.* Закрученные потоки. М.: Мир, 1987, 588 с.

Н. В. Данилова, И. А. Землякова (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Некоторые задачи оптимального управления с разладкой.**

Процессы с разладкой являются важным подклассом процессов со сменой режимов. Основной задачей, которая обсуждается в публикациях, является задача наиболее быстрого обнаружения момента разладки [1–3]. Рассматривается обобщение процессов с разладкой, а именно процессы с векторной разладкой, и важный класс задач оптимального управления такого рода процессами без обнаружения разладки.

Рассмотрим задачу оптимального управления на конечном интервале $[0, T]$ следующего вида:

$$\min_{\beta_y|x, y_0} \mathbf{M}(\Phi(Y_T, \xi)) \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} Y(t) &= y_0 + \int_0^t \beta_{Y|X}(s) dX_s, \\ X(t) &= x_0 + \int_0^t \alpha_X(s) dX_s + \int_0^t \beta_X(s) dW_s, \\ y_0 &\leq a. \end{aligned}$$

Здесь случайная величина ξ измерима относительно σ -алгебры F_T , $\Phi(x, y)$ — выпуклая функция по первой переменной при произвольном значении второй переменной.

Процесс X — базовый процесс, а процесс $\beta_{Y|X}$ — управление или стратегия. Рассмотрим мартингальную меру

$$\bar{P} : d\bar{P}_T = Z_T dP_T.$$

Относительно этой новой меры процессы X_t и Y_t — мартингалы с непрерывными траекториями. Предположим, что существует решение задачи

$$\min_{\eta} \mathbf{M}(\Phi(\eta, \xi)) \quad \text{при условии} \quad \bar{\mathbf{M}}\eta \leq a. \quad (2)$$

Допустим, что η^* — решение задачи (2). Рассмотрим процесс

$$V(t) = \overline{\mathbf{M}}(\eta^* | F_t), \quad (3)$$

который является равномерно интегрируемым мартингалом относительно определенной ранее фильтрации и меры $\overline{P}$, поэтому (3) выражается в виде

$$V(t) = \overline{\mathbf{M}}\eta^* + \int_0^t \beta_{V|X}(s) dX_s. \quad (4)$$

Поскольку $\overline{\mathbf{M}}[\eta^*] < \infty$ и $V(T) = \eta^*$, то процесс $\beta_{V|X} = \beta_{Y|X}$ и начальное значение $y_0 = \mathbf{M}\eta^*$ являются решением задачи (1).

Теорема Если существует решение задачи (2), то решение задачи (1) строится следующим образом.

1. Определяется мартингальная мера $\overline{P}$ при помощи процесса плотности Z .
2. Решается задача (2).
3. Вычисляется мартингал V и разложение мартингала (4) по процессу X .

Рассматривается задача управления на конечном временном интервале. Для этих задач предложен вычислительный метод их решения с использованием мартингальной техники [4].

В качестве приложения к финансовой математике рассматривается модель финансового рынка как пары активов: рискованного (стоимость акции) S и безрискового (банковский счет) B . Эти активы представлены своими ценами $S(t)$ и $B(t)$, $t \in [0, T]$.

Активы подчиняются следующим уравнениям:

$$dS(t) = S(t) dX(t), \quad dB(t) = rB(t) dt \quad (5)$$

с начальными значениями S_0 и B_0 . Рассматривается самофинансируемый портфель, капитал которого $G(t)$ удовлетворяет соотношению

$$dG(t) = \gamma(t) dS(t) + \beta(t) dB(t).$$

Задача заключается в вычислении

$$\min_{\gamma, \beta} (f(S(T)) - G(T))^+ \quad (6)$$

с учетом (5) при ограничении $G_0 \leq a$. В (6) функция $f(x)$ неотрицательна и ограничена сверху. Рассмотрим дисконтированный процесс

$$\overline{S}(t) = \frac{S(t)}{B(t)},$$

дифференциал которого имеет вид

$$d\overline{S}(t) = \overline{S}(t)((\alpha_X(t) - r) dt + \beta_X(t) dW_t).$$

При этом для дифференциала дисконтированного капитала

$$d\overline{G}(t) = d \frac{G(t)}{B(t)} = \gamma(t) d\overline{S}(t).$$

Определим

$$\bar{f}(\bar{S}(T)) = \frac{f(\bar{S}(T)B(T))}{B(T)},$$

что позволяет рассмотреть эквивалентную и более простую задачу:

$$\min_{\gamma} \mathbf{M}(\bar{f}(\bar{S}_T) - \bar{G}(T))^+$$

при ограничениях $\bar{G}_0 \leq \frac{a}{B_0}$ и $\bar{G}(t) = \bar{G}_0 + \int_0^t \gamma(s) d\bar{S}(s)$ а решение этой задачи находится с помощью сформулированного ранее вычислительного метода, если положить $X(t) = \bar{S}(t)$ и $Y(t) = \bar{G}(t)$. Далее, не нарушая общности, будем считать, что $r = 0$.

Для случая, когда разладка затрагивает только снос, а $\beta_X(t) = \sigma$ является константой, имеем: $S(t) = S_0 \exp(\bar{C}(t) - \sigma W_t)$ и $S(t) = S_0 \exp(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t)$ для исходной меры и мартингальной меры соответственно. Процесс

$$\bar{C}(t) = C(t) - \frac{\sigma^2}{2}t.$$

Доклад заканчивается рассмотрением результатов вычислительного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shiryaev A. Quickest Detection Problems in the Technical Analysis of the Financial Data / Mathematical finance. Ed. H. Geman, D. Madan, S. Pliska, T. Vorst. Springer, 2000, p. 487–521.
2. Gapeev P. V., Peskir G. The Wiener Disorder Problem With Finite Horizon Stoch. — Proc. Appl. 2006, v. 116, №12, p. 1770–1791.
3. Truong C., Oudrec L., Vayatisa N. A review of change point detection methods. //arXiv:1801.00718v1 [cs.CE] 2 Jan 2018.
4. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.

Н. А. Зайчикова, Р. В. Федоренко (Самара, Самарский государственный экономический университет). **Моделирование экспорта региона Российской Федерации на основе эконометрийского подхода.**

С точки зрения показателей включенности отечественной экономики в международную торговлю Россия в целом соответствует как среднемировым показателям, так и показателям основных крупных развивающихся экономик. В то же время «качество» участия российских предприятий в международной торговле (международном разделении труда) можно значительно улучшить [2]. В связи с этим возрастает роль регулирования внешнеэкономической деятельности на региональном уровне, что в свою очередь определяет потребность в экономико-математическом моделировании и прогнозировании [1].

В качестве методологической основы работы взято математико-методическое обеспечение индикативного подхода к оценке эффективности внешнеэкономической деятельности [4]. Для анализа собраны данные Федеральной службы государственной статистики по 84 регионам РФ по результативному признаку «экспорт региона РФ» (ЕХ) и 14 социально-экономическим факторным признакам за 2017 г. [3, 5].

Для повышения качества исходного эмпирического материала результирующий показатель ЕХ деятельности субъекта Российской Федерации был протестирован на наличие нетипичных наблюдений с применением критерия Граббса. Среднее значение экспорта по данной совокупности составило 4342,704 млн. долл. США, что в 34,367 раза меньше найденного аномального значения 149246,6 млн. долл. США г. Москва. Наблюдаемое значение критерия Граббса составляет 8,784, что больше критического значения для любого допустимого уровня статистической значимости, следовательно, указанное наблюдение из выборки удаляется.

Взаимосвязь социально-экономических показателей региона является естественным следствием его социально-экономического развития. С помощью матрицы парных коэффициентов корреляции выявлены существенные факторы количественного анализа экспорта региона; определены и удалены факторы, являющиеся причиной мультиколлинеарности в моделях. В качестве показателей, значимо влияющих на экспорт региона (млн. долл. США) — ЕХ, выделены такие как: инвестиционный капитал (млрд. руб.) — I, среднегодовая численность занятых (тыс. чел.) — L1, среднемесячная номинальная начисленная заработная плата работников организаций (руб.) — L2, оборот розничной торговли (млрд. руб.) — TR, объем отгруженных товаров собственного производства и услуг, выполненных собственными силами, по добыче полезных ископаемых и обрабатывающих производств (млн.) — EXTR, MF, соответственно.

Построены различные эконометрические модели экспорта, проведены пошаговые методы отбора факторов в модели, проверено и сопоставлено статистическое качество моделей. Из множества регрессионных моделей отобраны лучшие с точки зрения объясняющей способности и статистической значимости. Проверены условия Гаусса–Маркова, гарантирующие несмещенность, состоятельность и эффективность оценок коэффициентов регрессии. В качестве итоговых выбраны лучшие модели с коррекцией гетероскедастичности, полученные с помощью взвешенного метода наименьших квадратов с контролем величины стандартных ошибок и статистической значимости оценок коэффициентов регрессии и модели в целом, для которых построены точечный и интервальный прогнозы для регионального экспорта в программном пакете Gretl.

Приведем пять лучших по объясняющей способности моделей, имеющих статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии, стоящих при переменных, и значимость модели в целом не ниже 1%:

- 1) $EX = -90,6671 + 0,004391 MF + 0,007901 EXTR,$ $R^2 = 0,55,$ $R^2_{adj} = 0,53;$
 $(91,3698) \quad (0,0006206) \quad (0,001239)$
- 2) $EX = -123,657 + 15,2902 I,$ $R^2 = 0,49,$ $R^2_{adj} = 0,48;$
 $(127,548) \quad (1,7413)$
- 3) $EX = -2017,96 + 0,004874 MF + 0,07956 L2,$ $R^2 = 0,48,$ $R^2_{adj} = 0,47;$
 $(484,095) \quad (0,0007356) \quad (0,01892)$
- 4) $EX = -2892,46 + 2,60008 L1 + 0,09883 L2,$ $R^2 = 0,44,$ $R^2_{adj} = 0,43;$
 $(630,079) \quad (0,3452) \quad (0,02342)$
- 5) $EX = -2649,46 + 4,8828 TR + 0,1049 L2,$ $R^2 = 0,37,$ $R^2_{adj} = 0,35.$
 $(692,457) \quad (1,0583) \quad (0,02916)$

Таким образом, в исследовании построены модели зависимости экспорта от социально-экономических факторов развития региона. Выявлена и оценена с помощью эконометрического моделирования прямая зависимость экспорта от инвестиционного капитала, среднегодовой численности занятых, среднемесячной номинальной начисленной заработной платы работников организаций, оборота розничной торговли, объема отгруженных товаров собственного производства и услуг, выполненных собственными силами по добыче полезных ископаемых и в обрабатывающих производствах.

Полученные результаты могут быть использованы при исследовании экспорта регионов и для его прогнозирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-510-23001 в рамках конкурса на лучшие научные проекты фундаментальных исследований, проводимый совместно РФФИ и Фондом «За русский язык и культуру» в Венгрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

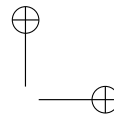
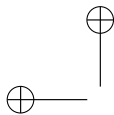
1. *Жиряева Е. В.* Регулирование внешнеэкономической деятельности на региональном уровне в глобальных условиях ВТО. Дисс. на соискание уч. ст. доктора эконом. наук. СПб, 2018, 370 с.
2. Развитие российского экспорта: эксплуатация существующей модели или становление новой. Некоторые проблемы и особенности российского экспорта. — Торговая политика, 2015, т. 2, № 2, с. 151–162.
3. Россия в цифрах. 2017. Краткий статистический сборник. М.: Росстат, 2017, 511 с.
4. *Сахарова О. С.* Экономико-математические модели индикативной оценки эффективности внешнеэкономической деятельности. Дисс. на соискание уч. ст. канд. эконом. наук. Белгород, 2015, 263 с.
5. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс]. URL: <http://www.gks.ru/> (дата обращения: 10.06.2019).

Т. В. Захарова (Москва, ВМК МГУ; Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН). **Обратные задачи магнитоэнцефалографии.**

Наиболее неизученным и самым сложным органом в природе является головной мозг человека, который является очень чувствительным к оперативному вмешательству и требует вследствие этого безопасных и безболезненных методов исследования.

Головной мозг состоит из приблизительно 200 миллиардов нейронов, связанных между собой особыми связями, превращающими наш мозг во взаимосвязанную сеть. Взаимодействуя посредством этих связей, нейроны формируют электрические импульсы, которые управляют деятельностью всего человеческого организма.

Вследствие того, что человеческий мозг очень сложно устроен, его работа до сих пор не достаточно изучена. Сверхслабые магнитные поля мозга обнаруживаются специальным устройством, называемым магнитоэнцефалографом. А технология, использующая эти устройства и позволяющая измерять и визуализировать магнитные поля, называется магнитоэнцефалографией (МЭГ).



Результатом проведения магнитоэнцефалографии являются большие массивы данных, несущие информацию о процессах, происходящих в головном мозге. В ходе обработки этих данных перед исследователем ставится обратная задача, заключающаяся в пространственной реконструкции источников МЭГ-сигналов в коре головного мозга.

На настоящий момент не существует универсальных инструментов для точного в достаточной степени решения такой обратной задачи при анализе МЭГ-сигналов. Одному и тому же распределению потенциалов на поверхности головы могут соответствовать различные зоны активности коры головного мозга. Однако при некоторых предположениях задача имеет однозначное решение.

Магнитная энцефалография предоставляет уникальную возможность неинвазивного изучения нейронных процессов, происходящих в мозге. МЭГ с высокой точностью регистрирует электрические сигналы и позволяет найти решение в сочетании с магнитно-резонансной томографией (МРТ) с высокой временной частотой. Квазистатическое магнитное поле, вызванное нейронными источниками, значительно менее чувствительно к анизотропии проводящих свойств головных тканей, чем электрический потенциал на коже головы. Таким образом, в отличие от ЭЭГ, МЭГ имеет более простую и точную модель объемного проводника, связывающего геометрические свойства нейронного источника с сигналами на сенсорах. Поэтому МЭГ потенциально позволяет более точно локализовать активные источники на основе регистрируемых данных.

Ранее для решения обратных задач магнитоэнцефалографии рассматривались в основном сфероидальные и эллипсоидальные модели [1, 2]. Отметим, что в этих геометриях в однодипольных моделях впервые были получены аналитические решения для обратной задачи. Дополнительно было проведено исследование на устойчивость решения в случае, когда диполь расположен на главной полуоси сфероида.

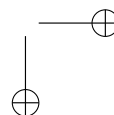
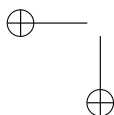
В работе, представленной данным сообщением, рассмотрена и модель эллиптического параболоида, для которой найдены решения как прямой, так и обратной задачи по локализации источников активности.

Также в работе рассмотрено решение обратной задачи в случае двудипольной сферической модели. Распределение магнитного поля на поверхности головы в данном случае рассматривалось как суперпозиция магнитных индукций, порождаемых каждым из источников. Получение аналитических решений в рамках этой модели оказалось достаточно затруднительным, поэтому для решения обратной задачи были применены современные методы машинного обучения, а именно сверточные нейронные сети. Отклонение ответов модели от истинных значений оказалось практически малым.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-07-00252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zakharova T. V., Karpov P. I., Bugaevskii V. M. Localization of the activity source in the inverse problem of magnetoencephalography. — Comput. Math. Model., 2017, v. 28, № 2, p. 148–157.
2. Karpov P. I., Zakharova T. V. Magnetoencephalography inverse problem in the spheroid geometry. — J. Inverse Ill-Posed Probl., 2019, v. 27, № 2, p. 159–169.



В. А. Зотов (Москва, МАИ). **Истечение жидкости из перевернутых конусов.**

Пусть вязкая несжимаемая жидкость вытекает из двух открытых сверху взаимно перевернутых усеченных конусов одинаковой высоты H с радиусами верхних и нижних оснований $\{R_1; R_2\}$ и $\{R_2; R_1\}$ соответственно.

Скорость истечения жидкости определяется законом Торричелли

$$V(k) = \mu \sqrt{2gh},$$

где μ — коэффициент расхода жидкости ($0 < \mu < 1$); $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения; $h(t)$ — высота уровня жидкости в сосуде, вычисляемая из решения задачи Коши

$$S(h) \frac{dh}{dt} + \pi r^2 V(h) = 0; \quad h(0) = H.$$

При этом площадь поперечного сечения $S(h)$ в первом случае имеет вид

$$S_1(h) = \pi \left(R_1 + \frac{R_2 - R_1}{H} h \right)^2,$$

а во втором

$$S_2(h) = \pi \left(R_2 + \frac{R_1 - R_2}{H} h \right)^2.$$

Время истечения жидкости находится из условия

$$h(T) = 0$$

и равно

$$T_1 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{8R_1^2 + 4R_1R_2 + 3R_2^2}{15r^2}, \quad (1)$$

$$T_2 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{3R_1^2 + 4R_1R_2 + 8R_2^2}{15r^2}, \quad (2)$$

Из уравнений (1), (2) следует, что, во-первых,

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2H}{g}} \frac{R_1^2 - R_2^2}{3r^2},$$

а, во-вторых,

$$T_1 = f(k) T_2,$$

где

$$f(k) = \frac{8k^2 + 4k + 3}{3k^2 + 4k + 8}, \quad k = \frac{R_1}{R_2}.$$

Следовательно,

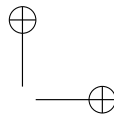
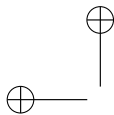
$$T_1 > T_2,$$

если

$$R_1 > R_2,$$

и

$$\frac{3}{8} < \frac{T_1}{T_2} < \frac{8}{3}.$$



Например, для отношения

$$R_1 = 2 R_2$$

справедливо условие

$$T_1 = \frac{43}{28} T_2 \approx 1,5 T_2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зотов В. А. Обобщенная модель истечения жидкости из резервуара. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2018, т. 25, в. 3, с. 248–249.
2. Зотов В. А. Истечение жидкости из конуса. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 72–73.

А. В. Калинин, С. С. Кудряшов (Москва, МГТУ им. Н. Э. Баумана). Вероятности вырождения марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $2T_1 \rightarrow T_1 + T_2, 2T_2$.

Рассматривается однородный во времени марковский процесс

$$\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t)), \quad t \in [0, \infty),$$

на множестве состояний

$$N^2 = \{(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots\},$$

переходные вероятности

$$P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = \mathbf{P} \{ \xi(t) = (\beta_1, \beta_2) | \xi(0) = (\alpha_1, \alpha_2) \}$$

которого при $t \rightarrow 0+$ представимы в виде

$$P_{(\alpha_1-1, \alpha_2+1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = p_{11} \alpha_1 (\alpha_1 - 1) \lambda t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1-2, \alpha_2+2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = p_{02} \alpha_1 (\alpha_1 - 1) \lambda t + o(t),$$

$$P_{(\alpha_1, \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) = 1 - \alpha_1 (\alpha_1 - 1) \lambda t + o(t),$$

где

$$\lambda > 0, \quad p_{11} \geq 0, \quad p_{02} \geq 0, \quad p_{11} + p_{02} = 1.$$

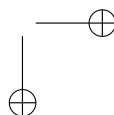
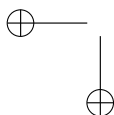
Производящая функция переходных вероятностей

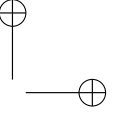
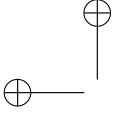
$$F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2) = \sum_{\beta_1, \beta_2=0}^{\infty} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t) s_1^{\beta_1} s_2^{\beta_2}, \quad |s_1| \leq 1, \quad |s_2| \leq 1,$$

удовлетворяет второму (прямому) уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial t} = \lambda (p_{11} s_1 s_2 + p_{02} s_2^2 - s_1^2) \frac{\partial^2 F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(t; s_1, s_2)}{\partial s_1^2}$$

с начальным условием $F_{(\alpha_1, \alpha_2)}(0; s_1, s_2) = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2}$.





Экспоненциальная производящая функция переходных вероятностей

$$G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} P_{(\beta_1, \beta_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t),$$

удовлетворяет первому (обратному) уравнению Колмогорова [3]

$$\frac{\partial G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2)}{\partial t} = \lambda z_1^2 \left(p_{11} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + p_{02} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right) G_{(\beta_1, \beta_2)}(t; z_1, z_2),$$

с начальным условием

$$G_{(\beta_1, \beta_2)}(0; z_1, z_2) = \frac{z_1^{\beta_1} z_2^{\beta_2}}{\beta_1! \beta_2!}.$$

Состояния $(0, \gamma_2), (1, \gamma_2), \gamma_2 = 0, 1, \dots$ являются поглощающими. Вероятности остановки процесса равны

$$q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}(t), \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots$$

Для экспоненциальной производящей функции

$$g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} q_{(0, \gamma_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)}, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots,$$

имеем:

$$g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} G_{(0, \gamma_2)}(t; z_1, z_2),$$

причем эта функция удовлетворяет стационарному первому уравнению

$$p_{11} \frac{\partial^2 g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_1 \partial z_2} + p_{02} \frac{\partial^2 g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_2^2} - \frac{\partial^2 g_{(0, \gamma_2)}}{\partial z_1^2} = 0, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots,$$

при граничных условиях

$$g_{(0, \gamma_2)}(0, z_2) = \frac{z_2^2}{\gamma_2!}, \quad \frac{\partial g_{(0, \gamma_2)}(0, z_2)}{\partial z_1} = 0.$$

Общее решение линейного уравнения в частных производных второго порядка находится методом характеристического уравнения [1]. Частное решение имеет вид

$$g_{(0, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \frac{p_{02} (z_1 + z_2)^{\gamma_2}}{(1 + p_{02}) \gamma_2!} + \frac{(z_2 - p_{02} z_1)^{\gamma_2}}{(1 + p_{02}) \gamma_2!}, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots$$

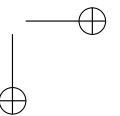
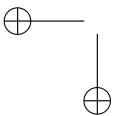
Для аналогичной экспоненциальной производящей функции $g_{(1, \gamma_2)}(z_1, z_2)$ имеем граничные условия

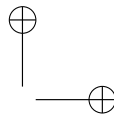
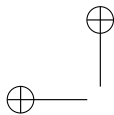
$$g_{(1, \gamma_2)}(0, z_2) = 0, \quad \frac{\partial g_{(1, \gamma_2)}(0, z_2)}{\partial z_1} = \frac{z_2^2}{\gamma_2!},$$

и решение стационарного первого уравнения

$$g_{(1, \gamma_2)}(z_1, z_2) = \frac{(z_1 + z_2)^{1+\gamma_2}}{(1 + p_{02}) (1 + \gamma_2)!} - \frac{(z_2 - p_{02} z_1)^{1+\gamma_2}}{(1 + p_{02}) (1 + \gamma_2)!}, \quad \gamma_2 = 0, 1, \dots$$

Раскладывая бином по z_1, z_2 , получаем утверждение.





Теорема [2]. Вероятности вырождения равны

$$q_{(0, \alpha_1 + \alpha_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{p_{02} + (-p_{02})^{\alpha_1}}{1 + p_{02}}, \quad q_{(1, \alpha_1 + \alpha_2 - 1)}^{(\alpha_1, \alpha_2)} = \frac{1 - (-p_{02})^{\alpha_1}}{1 + p_{02}}, \quad \alpha_1, \alpha_2 = 0, 1, \dots$$

Возможность применения изложенного метода экспоненциальной производящей функции [3, 4] для нахождения явных выражений для вероятностей вырождения марковских процессов или вероятностей остановки случайных блужданий связана со сложностью применения тех или иных методов решения линейных уравнений в частных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. 6-е изд., доп. М.: Наука, 1975, 128 с.
2. Кудряшов С. С. Стохастические аналоги основных детерминированных моделей эпидемий. Дипломная работа. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014, 144 с.
3. Калинин А. В. Марковские ветвящиеся процессы с взаимодействием. — Успехи матем. наук, 2002, т. 57, в. 2, с. 23–84.
4. Калинин А. В., Смирнов А. В. Вероятности вырождения марковского ветвящегося процесса со схемой взаимодействий $T_1 \rightarrow 0, T_2$; $2T_2 \rightarrow T_1$. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2016, т. 23, в. 4, с. 356–357.

В. А. К и р ю х и н (Москва, ОАО «ИнфоТеКС»). Атака методом бумеранга на связанных ключах на 5 раундов шифра Кузнечик.

Атака методом бумеранга на блочный шифр была предложена в [2]. В работе [3] метод бумеранга был применен для атаки с использованием связанных ключей.

В работе [4] была предложена атака на связанных ключах на 5-раундовый шифр Кузнечик [1], формула шифрпреобразования которого имеет вид

$$E_K(A) = E_{K_1, K_2}(A) = X[K_6]LSX[K_5]LSX[K_4]LSX[K_3]LSX[K_2]LSX[K_1](A),$$

$$K_3 = K_1 \oplus LSX[C_2](K_2 \oplus LSX[C_1](K_1)),$$

$$K_4 = K_2 \oplus LSX[C_1](K_1),$$

$$K_5 = K_3 \oplus LSX[C_4](K_4 \oplus LSX[C_3](K_3)),$$

$$K_6 = K_4 \oplus LSX[C_3](K_3).$$

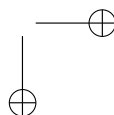
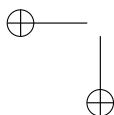
Трудоемкость упомянутой атаки 2^{32} операций, 2^{16} связанных ключей, 2^{30} памяти.

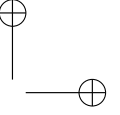
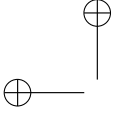
В рамках модели связанных ключей атакующий имеет возможность зашифровать и дешифровать любой текст с использованием ключей

$$K = K_1 || K_2 \quad \text{и} \quad \tilde{K} = \tilde{K}_1 || \tilde{K}_2.$$

Ключи K и $\tilde{K}$ неизвестны атакующему, но известна связь между ними

$$K \oplus \tilde{K} = \Delta K_1 || \Delta K_2.$$





Выберем $\Delta K_1 = 0$, $\Delta K_2 = \varkappa$, где $\varkappa$ содержит один ненулевой байт, тогда $\Delta K_4 = \varkappa$, а число возможных ΔK_3 не превосходит 2^7 .

Возьмем произвольный открытый текст P и получим два соответствующих шифртекста

$$Q = E_K(P) \quad \text{и} \quad \tilde{Q} = E_{\tilde{K}}(P).$$

Выберем разность δ так, чтобы в $L^{-1}(\delta)$ был один ненулевой байт. Возьмем шифртексты

$$Z = Q \oplus \delta, \quad \tilde{Z} = \tilde{Q} \oplus \delta$$

и соответствующие открытые тексты

$$W = E_K^{-1}(Z), \quad \tilde{W} = E_{\tilde{K}}^{-1}(\tilde{Z}).$$

Известна разность $\Delta W = W \oplus \tilde{W}$. Введем обозначения:

$$Y = \text{LSX}[K_1](W), \quad \tilde{Y} = \text{LSX}[K_1](\tilde{W}).$$

Тогда вероятность того, что $\Delta Y = Y \oplus \tilde{Y}$ имеет только один ненулевой байт, можно оценить снизу значением $p = 2^{-21}$:

$$\mathbf{P} \{ \text{LSX}[K_2] \text{LSX}[K_1](P) \oplus \text{LSX}[\tilde{K}_2] \text{LSX}[K_1](P) = \Delta K_3 \} \geq \frac{1}{2^7},$$

$$\mathbf{P} \{ \nabla = \tilde{\nabla} \} \geq \frac{1}{2^7},$$

$$\mathbf{P} \{ S^{-1}(S(D) \oplus \nabla) \oplus S^{-1}(S(D \oplus \varkappa) \oplus \nabla) = \varkappa \} \geq \frac{1}{2^7},$$

где

$$\nabla = L^{-1}X[K_5]S^{-1}L^{-1}X[K_6](Z) \oplus L^{-1}X[K_5]S^{-1}L^{-1}X[K_6](Q),$$

$$\tilde{\nabla} = L^{-1}X[\tilde{K}_5]S^{-1}L^{-1}X[\tilde{K}_6](\tilde{Z}) \oplus L^{-1}X[\tilde{K}_5]S^{-1}L^{-1}X[\tilde{K}_6](\tilde{Q}),$$

$$D = X[K_4] \text{LSX}[K_3] \text{LSX}[K_2] \text{LSX}[K_1](P).$$

Для каждой пары $W, \tilde{W}$ опробуется 255 вариантов ΔY и строится множество возможных ключей K_1 , удовлетворяющих соотношению

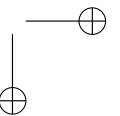
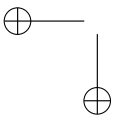
$$S(K_1 \oplus W) \oplus S(K_1 \oplus \tilde{W}) = L^{-1}(\Delta Y).$$

Известно [?], что в среднем каждый набор $W, \tilde{W}, \Delta Y$ будет давать один вариант ключа K_1 . Для определения истинного ключа K_1 потребуется в среднем $2 \cdot p^{-1}$ текстов $W, \tilde{W}$, при этом истинный ключ встретится дважды, любой ложный ключ — только один раз.

Трудоёмкость предложенной атаки:

- $2^{34} = p^{-1} \cdot 2 \cdot 255 \cdot 16$ операций доступа к памяти, два связанных ключа,
- $2^{24} = p^{-1} \cdot 2 \cdot 4$ адаптивно выбираемых пар ОТ/ШТ,
- $2^{29} = p^{-1} \cdot 2 \cdot 255 \cdot 2^{-1}$ 16-байтовых блоков памяти.

Экспериментальная проверка показала корректность оценок трудоёмкости атаки. Оценка вероятности p может быть увеличена за счет выбора конкретных $\varkappa$ и δ с использованием подходов, изложенных в [5].



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Национальный стандарт Российской Федерации ГОСТ Р 34.12-2015. Информационная технология. Криптографическая защита информации. Блочные шифры. Федеральное Агентство по техническому регулированию и метрологии. М.: Стандартинформ 2016, 15 с.
2. *Wagner D.* The boomerang attack. In: Fast Software Encryption—FSE'99. 6th International Workshop (Rome, March 24–26, 1999). Proceedings / Ed. by L. Knudsen. Heidelberg etc.: Springer, 1999, p. 156–170. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 1636.)
3. *Biham E., Dunkelman O., Keller N.* Related-key boomerang and rectangle attacks. In: Advances in Cryptology—EUROCRYPT 2005. 24th Annual International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques (Aarhus, May 22–26, 2005). Proceedings. / Ed. by R. Cramer. Heidelberg etc.: Springer, 2005, p. 507–525. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 3494.)
4. *Kiryukhin V.* Related-key Attack on 5-round Kuznyechik. In: 8th Workshop on Current Trends in Cryptology—CTCrypt 2019 (Светлогорск, 3–7 июня 2019). https://ctcrypt.ru/files/files/2019/materials/14_Kiryukhin.pdf
5. *Cid C., Huang T., Peyrin T., Sasaki Yu., Song L.* Boomerang Connectivity Table: A New Cryptanalysis Tool. Advances in Cryptology—EUROCRYPT 2018. 37th Annual International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques (Tel Aviv, April 29–May 3, 2018). Proceedings. Part II. / Ed. by R. Cramer. J. B. Nielsen, V. Rijmen. Heidelberg etc.: Springer, 2018, p. 683–714. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 10821.)
6. *Derbez P., Fouque P.-A., Jean J.* Improved key recovery attacks on reduced-round AES in the single-key setting. In: Advances in Cryptology—EUROCRYPT 2013. 32nd Annual International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques (Athens, May 26–30, 2013). Proceedings. / Ed. by T. Johansson, P. Q. Nguyen. Heidelberg etc.: Springer, 2013, p. 371–387. (Ser. Lect. Notes Comput. Sci. V. 7881.)

В. П. Котельников (Ростов-на-Дону, ВНИИ «Градиент»). Метод определения числовых характеристик произведения нескольких коррелированных случайных величин.

Предлагаемый метод значительно проще, чем изложенный в [1], так как не требует знания распределений вероятностей случайных величин.

Постановка задачи. Рассматривается произведение m случайных аргументов $u = \prod_{i=1}^m x_i$. Известны математические ожидания $\mathbf{M}x_i$, дисперсии $\mathbf{D}x_i$ и корреляционная матрица $[r_{x_i x_j}]_1^m = [r_{ij}]_1^m$. Необходимо вычислить математическое ожидание $\mathbf{M}u$ и дисперсию $\mathbf{D}u$.

Решение. Рассмотрим частную функцию $y = x_1 x_2$ и определим ее характеристики. Математическое ожидание находим по известной теореме:

$$\mathbf{M}y = \mathbf{M}x_1 \mathbf{M}x_2 + r_{x_1 x_2} \sqrt{\mathbf{D}x_1} \sqrt{\mathbf{D}x_2}.$$

Дисперсию вычисляем на основе выражения, предложенного в [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}y = & (1 + r_{x_1 x_2}^2) \mathbf{D}x_1 \mathbf{D}x_2 + \mathbf{D}x_1 (\mathbf{M}x_2)^2 + \mathbf{D}x_2 (\mathbf{M}x_1)^2 \\ & + 2 r_{x_1 x_2} \sqrt{\mathbf{D}x_1} \sqrt{\mathbf{D}x_2} \mathbf{M}x_1 \mathbf{M}x_2. \end{aligned}$$

Далее применяем метод математической индукции. При $m = 3$ рассмотрим функцию $u = y x_3$ и определим ее характеристики. Вначале вычислим коэффициент множественной корреляции

$$R_{x_3|y} = R_{x_3|x_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{x_1x_3}^2 + r_{x_2x_3}^2 - 2r_{x_1x_2}r_{x_1x_3}r_{x_2x_3}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}.$$

Математическое ожидание и дисперсию функции находим по аналогичным выше выражениям:

$$Mu = Mx_3 My + R_{x_3|y} \sqrt{Dx_3} \sqrt{Dy}.$$

$$Du = (1 + R_{x_3|y}^2) Dx_3 Dy + Dx_3 (My)^2 + Dy (Mx_3)^2 + 2 R_{x_3|y} \sqrt{Dx_3} \sqrt{Dy} Mx_3 My.$$

Для $m = 2$ и $m = 3$ при большом числе вариантов исходных данных математические ожидания и дисперсии вычислены по приведенным формулам, а также методом статистического моделирования. Результаты показали приемлемую для инженерных расчетов точность, поэтому для решения поставленной задачи при $m \geq 3$ можно применить метод математической индукции. Когда аргументы функции u некоррелированы, выражения для Mu и Du совпадают с известными выражениями из теорем о числовых характеристиках.

Коэффициент множественной корреляции определяется по известному выражению

$$R_{x_m|x_1x_2\dots x_{m-1}} = \sqrt{1 - \frac{\Delta_r}{\Delta_{mm}}},$$

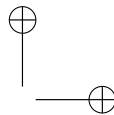
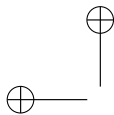
где Δ_r — определитель корреляционной матрицы $[r_{ij}]_1^m$, Δ_{mm} — алгебраическое дополнение элемента r_{mm} корреляционной матрицы. Целесообразно $R_{x_m|x_1x_2\dots x_{m-1}}$ вычислять на компьютере, используя встроенные функции для определителей матриц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котельников В. П. Аналитический метод вычисления числовых характеристик произведения двух и более коррелированных случайных величин. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2018, т. 25, в. 1, с. 82–83.
2. Котельников В. П. Вычисление дисперсии произведения двух коррелированных случайных величин. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2017, т. 24, в. 1, с. 75.

С. И. Круглова, С. Ю. Мельников, Е. С. Сидоров (Москва, ООО «Линфо»). **Способ совместного выбора параметров метода импосторов в открытой задаче идентификации авторства текста (русский язык).**

Разработке методов определения авторства текста посвящено значительное количество исследований (см. обзор в [1]). В большинстве работ изучается закрытая задача идентификации (анализируемый текст написан одним из известных авторов). Здесь мы рассматриваем идентификацию авторства текста в условиях открытой задачи (анализируемый текст может быть написан как одним из известных, так и неизвестным автором).



Для идентификации используется метод импосторов [2, 3]. Предложен практический способ совместного выбора значений двух параметров этого метода, при которых достигается минимум среднего арифметического ошибок первого и второго родов. Значения параметров вычисляются на базе авторских текстов. Приведены результаты экспериментов для текстов на русском языке.

Метод импосторов. Анализируемому тексту X ставится в соответствие вектор характеристик, состоящий из частот n -грамм символов ($n = 1, 2, 3, 4$), слов ($n = 1, 2$), служебных слов (в подпоследовательности служебных слов [4]) ($n = 1, 2$), шаблонов очертаний слов (последовательность значений регистра букв), доли уникальных слов в тексте. Такие характеристики эффективны для определения авторства.

Степень близости $\text{sim}(X, Y)$ текстов X и Y вычисляется как min-max мера [5] между их векторами характеристик:

$$\text{sim}(X, Y) = \min \max(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\sum \min(x_i, y_i)}{\sum \max(x_i, y_i)}.$$

Степень $IM(X, Y)$ авторской близости текстов X и Y вычисляется с привлечением множества S посторонних, заведомо «чужих» текстов (так называемых импосторов) следующим образом.

Алгоритм

Вход: X, Y — тексты; S — множество импосторов

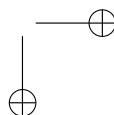
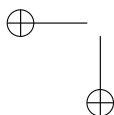
Параметры: k, n — целые; $\theta, \Delta, rate > 0$

Выход: $IM(X, Y)$

- 1 $Score = 0$
- 2 Повторяется k раз
 - a. Случайно выбираются координаты вектора $\mathbf{x}$, которые будут использоваться для подсчета степени близости. Доля множества выбираемых координат равна $rate$
 - b. Случайно выбираются тексты $I_1, \dots, I_n \in S$
 - c.
$$Score = Score + \frac{\text{sim}(X, Y) * \text{sim}(Y, X)}{\text{Max}_{1 \leq j \leq n} \text{sim}(X, I_j) * \text{Max}_{1 \leq j \leq n} \text{sim}(Y, I_j)}$$
- 3
$$IM(X, Y) = \frac{1}{k} Score$$

Пусть M авторов представлены коллекциями своих текстов

$$A_i = \{T_{ij}, j = 1, 2, \dots, |A_j|\}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$



Для анализируемого текста T вычисляются значения

$$GIM_{\Delta}(T, A_i) = \frac{1}{|A_i|} \sum Ind_{\Delta}(T, T_{ij}),$$

где

$$Ind_{\Delta}(T, T_{ij}) = \begin{cases} 1, & IM(T, T_{ij}) \geq \Delta, \\ 0, & IM(T, T_{ij}) < \Delta, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

В случае $GIM_{\Delta}(T, A_i) \geq \theta$ принимается решение, что текст T написан i -м автором, в противном случае считаем, что текст T написан другим автором.

Выбор параметров Δ и θ . Ошибка первого рода возникает в том случае, когда текст T написан i -м автором, но $GIM_{\Delta}(T, A_i) < \theta$. Ошибка второго рода возникает, если текст T написан другим автором, но $GIM_{\Delta}(T, A_i) \geq \theta$. Диапазоны изменения параметров

$$\Delta \in (0, \max_{i,j,T} IM(T, T_{ij})) \quad \text{и} \quad \theta \in (0, 1)$$

разбиваются равномерно на несколько отрезков, и в узлах полученной сетки вычисляются ошибки первого и второго родов. В качестве анализируемого текста T последовательно выбираются все авторские тексты $\{T_{ij}\}$, при этом идентифицируемый текст удаляется из авторской коллекции. Лучшей парой значений Δ и θ считается та, для которой сумма ошибок 1 и 2 родов по всем $\sum_{i=1}^M |A_i|$ анализируемым текстам минимальна.

Описание экспериментов. Исследования проводились на корпусе авторских текстов на русском языке, содержащем тексты 29 авторов (от 7 до 25 текстов одного автора), средняя длина текста составила 3543 символа. Корпус выбирался из публикаций в Живом Журнале за 2018–2019 гг. по общественно-политической тематике. Множество импосторов состояло из набора русскоязычных твитов общим объемом 500 МБ. При значениях параметров $k = 10$, $N = 20$, $rate = 0,4$ минимальное значение среднего арифметического ошибок достигнуто при значениях $\Delta = 0,9$, $\theta = 0,3$, и составило 0,26 (см. рис.).

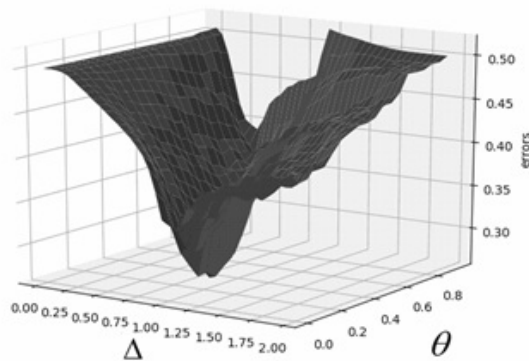


Рис. Среднее арифметическое ошибок первого и второго родов в зависимости от параметров Δ и θ

Заключение. Представлен способ расчета значений параметров метода импосторов, при которых на базе авторских текстов достигается минимум среднего арифметического ошибок первого и второго родов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Романов А. С., Шелупанов А. А., Мещеряков Р. В. Разработка и исследование математических моделей, методик и программных средств информационных процессов при идентификации автора текста. Томск: В-Спектр, 2011, 188 с.
2. Seidman S. Authorship verification using the impostors method. – Notebook for PAN at CLEF 2013. In: CLEF 2013 Evaluation Labs and Workshop. (Valencia, September 23–26, 2013.) Working Notes Papers. /Ed. by P. Forner, R. Navigli, D. Tufis. Aachen: CEUR-WS.org, 2013. <http://ceur-ws.org/Vol-1179/CLEF2013wn-PAN-Seidman2013.pdf>
3. Khonji M., Iraqi Y. A slightly-modified GI-based author-verifier with lots of features (ASGALF). – Notebook for PAN at CLEF 2014. — In: CLEF 2014 Evaluation Labs and Workshop. (Sheffield, September 15–18, 2014.) Working Notes Papers. /Ed. by L. Cappellato, N. Ferro, M. Halvey, W. Kraaij. Aachen: CEUR-WS.org, 2014. https://pan.webis.de/downloads/publications/papers/khonji_2014.pdf
4. Германович А. В., Мельников С. Ю., Хвостенко В. М. О выборе множества слов, характеризующих авторский стиль арабского текста. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2017, т 24, в. 4, с. 324–325.
5. Koppel M., Winter Y. Determining if two documents are written by the same author. — J. Assoc. Inform. Sci. Technol., 2014, v. 65, is. 1, p. 178–187.

М. М. Лери (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН). **О модулярности конфигурационных графов.**

Рассматриваются конфигурационные графы [1], степени вершин которых являются независимыми случайными величинами с общим распределением. Пусть ξ — случайная величина, равная степени произвольной вершины. Рассматриваются два варианта распределений степеней вершин графа: степенное распределение, заданное следующим равенством

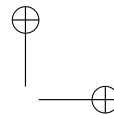
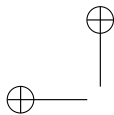
$$\mathbf{P}\{\xi \geq k\} = k^{-\tau}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \tau > 1, \quad (1)$$

и распределение Пуассона с единичным сдвигом

$$\mathbf{P}\{\xi = k + 1\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lambda > 0, \quad (2)$$

где τ и λ — параметры соответствующих распределений. Степени вершин образуют полуребра, занумерованные в произвольном порядке, которые затем соединяются между собой равновероятно, образуя ребра. В случае нечетной суммы степеней к равновероятно выбранной вершине добавляется одно полуребро. Такое построение графа допускает петли и кратные ребра.

При изучении свойств сложных сетей коммуникаций, для моделирования которых часто используются конфигурационные графы, рассматриваются различные характеристики этих сетей. Если необходимо разбить сеть на некоторые кластеры таким образом, чтобы узлы внутри кластеров были плотно связаны между собой, а связи между кластерами либо отсутствовали, либо были достаточно слабыми, то рассматривается такая характеристика, как модулярность сети Q [2]. Для нахождения наилучшего разделения вершин на кластеры, среди всех возможных разбиений находят то, которое обеспечивает максимум модулярности $Q_{\max}$ [2, 3].



С помощью методов имитационного моделирования были получены регрессионные зависимости $Q_{\max}$ от числа вершин графа N ($100 \leq N \leq 5000$) и параметров τ ($1, 1 \leq \tau \leq 3, 0$) распределения (1) и λ ($0, 1 \leq \lambda \leq 8, 0$) распределения (2):

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= 0,72N^{0,12-0,25/\tau}, & (R^2 &= 0,98); \\ Q_{\max} &= 0,573 - 0,009 \ln N - 0,206 \ln \lambda, & (R^2 &= 0,99). \end{aligned}$$

Наряду с фиксированными параметрами распределений (1) и (2), рассматривалось построение конфигурационных графов в так называемой случайной среде, т. е. когда параметр соответствующего распределения степеней вершин был случайной величиной, равномерно распределенной на некотором интервале.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bollobas B.* A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of regular graphs. — *European. J. Combin.*, 1980, v. 1, is. 4, p. 311–316.
2. *Newman M. E. J.* Modularity and community structure in networks. — *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2006, v. 103, is. 23, p. 8577–8582.
3. *Павлов Ю. Л.* О максимальной модулярности случайных конфигурационных графов. — *Труды Карельского научного центра РАН*, 2019, № 7, с. 36–41.

Г. С. Осипов, Е. В. Осипова (Южно-Сахалинск СахГУ; Санкт-Петербург, ФМЛ № 30). **О решении обратных задач с нечеткими соответствиями.**

Представим реляционное уравнение (левое) как композицию нечетких соответствий:

$$x \circ g = y, \quad x \in \mathbb{R}_{[0,1]}^{mn}, \quad g \in \mathbb{R}_{[0,1]}^{n,k}, \quad y \in \mathbb{R}_{[0,1]}^{mk}. \quad (1)$$

Очевидно, уравнение (1) представляет собой k независимых систем из m нечетких полиномиальных уравнений, которые, например, с использованием треугольных норм, могут быть записаны следующим образом:

$$\left\{ \max_j (T(x_{ij}, g_{jl})) = y_{il} (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}) \quad l = \overline{1, k}. \right.$$

При $i = fix$, $l = fix$ имеем отдельные нечеткие полиномиальные уравнения вида:

$$\max_j (T(x_j, g_j)) = y \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2)$$

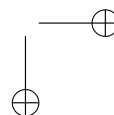
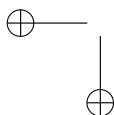
для которых справедливы следующие утверждения:

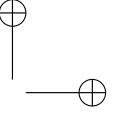
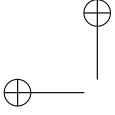
1. Для того, чтобы уравнения вида (2) имели решение $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие.

$$\exists q (1 \leq q \leq n) : g_q \geq y$$

Необходимость $(\exists (x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0) \Rightarrow \exists q (1 \leq q \leq n) : g_q \geq y) :$

Пусть $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$ — решение уравнения (2). Тогда найдется по крайней мере одно число $1 \leq q \leq n$ для которого выполняется равенство $T(x_q^0, g_q) = y$, а это значит, что $g_q \geq y$.





Достаточность $(\exists q (1 \leq q \leq n) : g_q \geq y \Rightarrow \exists (x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)) :$

Пусть $\exists q (1 \leq q \leq n) : g_q \geq y$. Тогда хотя бы одно из уравнений $T(x_q, g_q) = y$, имеет решение, следовательно для (2):

$$\max_j (T(x_j, g_j)) = \max (T(x_1, g_1) \leq y, \quad T(x_2, g_2) \leq y, \dots, T(x_q, g_q) = y, \dots) = y.$$

2. Компоненты максимального решения уравнений определяются следующим образом:

$$\bar{x}_j^0 = \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & g_j \leq y \\ r & g_j > y \end{array} \right. \quad (j = \overline{1, n}),$$

где

$$\left\{ \begin{array}{c|c} y & M(x_j, g_j) \\ y/g_j & P(x_j, g_j) \\ y - g_j + 1 & W(x_j, g_j) \end{array} \right. .$$

Здесь M , P и W — логическое, алгебраическое и граничное произведение, соответственно.

3. Компоненты минимального решения уравнений:

$$\underline{x}_j^0(k) = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & g_j < y \\ \left[\begin{array}{c} r \\ 0 \end{array} \right] & \begin{array}{c} i = Q_k \\ i \neq Q_k \end{array} \end{array} \right. ; \quad (j = \overline{1, n}; k = \overline{1, |Q|}),$$

где $Q = \{j : g_j \geq y(j = \overline{1, n})\}$.

В качестве примера решим многокаскадное уравнение с композицией нечетких соответствий вида:

$$x \circ a \circ b = y^0. \quad (3)$$

Пусть [1]:

$$a = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,44 & 0,62 \\ 0,73 & 0,61 & 0,91 \\ 0,44 & 0,80 & 0,57 \\ 0,84 & 0,88 & 0,53 \end{pmatrix};$$

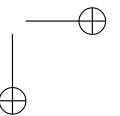
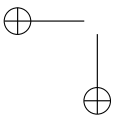
$$b = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,85 \\ 0,77 & 0,75 \\ 0,56 & 0,66 \end{pmatrix};$$

$$y^0 = \begin{pmatrix} 0,54 & 0,47 \\ 0,50 & 0,45 \end{pmatrix}.$$

При использовании в качестве импликации граничного произведения уравнение (3) примет вид:

$$\max_{j=1,4} \left(\max (x_{ij} + \max_{p=1,3} (\max(a_{jp} + b_{pl} - 1, 0)) - 1, 0) \right) = y_{il}^0; \quad (i, l = 1, 2).$$

Получили две системы $(l = 1, 2)$ из двух уравнений $(i = 1, 2)$.



Решение в среде Wolfram Mathematica [2]

$$\left\{ \begin{array}{c|c|c|c} 0 \leq x_{11} < 0,87 & 0 \leq x_{12} < 0,89 & 0 \leq x_{13} \leq 0,92 & x_{14} = 0,78 \\ \hline x_{11} = 0,87 & \left[\begin{array}{c} 0 \leq x_{12} < 0,89 \\ x_{12} = 0,89 \end{array} \right. & \left[\begin{array}{c} 0 \leq x_{13} \leq 0,92 \\ 0 \leq x_{13} \leq 0,92 \end{array} \right. & \left[\begin{array}{c} x_{14} = 0,78 \\ \leq x_{14} = 0,78 \end{array} \right. \\ \hline x_{21} = 0,83 & 0 \leq x_{22} < 0,85 & x_{23} = 0,90 & 0 \leq x_{24} = 0,74 \\ \hline 0 \leq x_{21} < 0,83 & \left[\begin{array}{c} 0 \leq x_{22} < 0,85 \\ x_{22} = 0,85 \end{array} \right. & \left[\begin{array}{c} x_{23} = 0,90 \\ x_{23} = 0,90 \end{array} \right. & \left[\begin{array}{c} x_{24} = 0,74 \\ 0 \leq x_{24} \leq 0,74 \end{array} \right. \end{array} \right\}.$$

Решение обратных задач с нечеткими соответствиями является базовой составляющей нечетких диагностических экспертных систем, находящих применение в технике, медицине и других предметных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Г.С.* Нечеткая модель подбора факультативов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 83–84. URL: <http://www.tvp.ru/conferen/vsppmXX/kidso003.pdf> (дата обращения: 14.07.2019)
2. *Осипов Г.С., Вашакидзе Н.С., Филиппова Г.В.* О решении обратных задач для нечетких соответствий в среде Wolfram Mathematica. — Постулат, 2018, № 1 (27), с. 42. DOI: 10.18411/Postulat-2018-1. idSP: <http://sp-identifier.ru/000001postulat-2018-1>

Э.В.Переходцева (Москва, Российский технологический университет (МИРЭА), Гидрометцентр России). **Развитие гидродинамико-статистических моделей прогноза сильного и опасного летнего ветра и сильных полусуточных летних осадков для территории Урала, Западной и Средней Сибири.**

Территория Урала, Западной и Средней Сибири значительно превышает территорию европейской части России и состоит из большого числа различных по своим географическим условиям регионов. Ущерб, причиняемый сильными ветрами и сильными осадками, очень велик. Заблаговременное успешное предупреждение таких ветров, включая шквалы и смерчи, позволило бы заранее принять предохранительные меры и значительно снизить экономические потери. Продолжительные сильные осадки также наносят значительный ущерб при наводнениях. Прогнозирование этих явлений по территории Урала и Сибири до настоящего времени является актуальной и весьма трудной задачей синоптической практики. В России пока не существует успешных гидродинамических прогнозов максимальных скоростей ветра. Существующие графические и расчетные методы прогноза шквалов и максимальных порывов ветра, использующие зависимость указанных явлений от двух-трех параметров, в значительной степени зависят от интуиции синоптика. Поэтому наиболее успешными методами объективизации прогноза таких явлений являются статистические методы, использующие зависимость возникновения сильных ветров, шквалов и смерчей от большого числа параметров атмосферы. Гидродинамические прогнозы штормового ветра и сильных неблагоприятных осадков пока также недостаточно успешны.

В связи с этим мы адаптировали для территории Урала и Сибири разработанные ранее для европейской части России методы оперативного гидродинамико-статистического прогноза сильного ветра скоростью свыше 19 м/с и свыше 24 м/с, включая шквалы и смерчи. Статистические решающие правила прогноза этих явлений были получены с использованием статистической модели прогноза на основе байесовского подхода распознавания векторов, принадлежащих выборкам двух классов.

В статистической модели метеорологические ситуации, в которых возникли указанные явления, представлялись как N -мерный вектор $\mathbf{X}$, входящий в выборку наличия явления. Для той же территории и тех же дат была сформирована и выборка отсутствия явлений (также N -мерных векторов, компонентами которых служили значения N потенциальных физически обоснованных параметров атмосферы). С целью уменьшения размерности пространства признаков N без значительной потери информации был применен предложенный нами метод диагонализации средней матрицы корреляции R и выделения блоков зависимых предикторов (параметров атмосферы) с последующим отбором наиболее информативных из них в вектор-предсказатель, состоящий из информативных и слабо зависимых предикторов — представителей от каждого блока матрицы R .

В качестве критериев информативности были использованы расстояние Махаланобиса и критерий минимума энтропии Вапника–Червоненкиса. В информативный вектор-предсказатель из $N = 38$ параметров вошли 6–8 параметров для разных моделей ветра и сильных осадков, включающих в частности, значения максимальной температуры и температуры точки росы у земли, модуля горизонтального градиента температуры на уровне 850 гПа, индекса неустойчивости Вайтинга и другие разные параметры для прогноза штормового ветра и сильных полусуточных осадков.

Для автоматизированного прогноза штормового ветра, включая шквалы и смерчи, с заблаговременностью 12, 24, 36 ч при расчете в оперативной системе значений дискриминантных функций (статистических решающих правил) использовались значения гидродинамического прогноза указанных выше метеоэлементов. В 2004–2005 гг для прогноза штормовых ветров по территории Сибири использовались прогностические поля полусферной гидродинамической модели Гидрометцентра России с заблаговременностью 12, 24, 36 ч. Предупрежденность ветра скоростью $V > 24$ м/с даже с заблаговременностью 36 ч составила 86%. Были предупреждены такие явления 24.06.05 в Новосибирске ($V = 37$ м/с), 24.06.05 на Алтае, 4.07.05 в Туруханске, и др. Значение критерия Пирси–Обухова () составило $T = 0,78$.

В настоящее время оперативной моделью Гидрометцентра России является региональная модель с горизонтальным разрешением 75×75 км.

Сейчас в статистических моделях прогноза шквалов, смерчей и сильных осадков для территории Урала и Сибири уже используются выходные поля этой модели заблаговременностью 12–48 ч. Разработана новая технология представления прогнозов в виде цветных карт, которые выкладываются на сайт и доступны синоптикам.

По территории Западной и Средней Сибири и Урала были проведены независимые испытания прогнозов опасного ветра и сильных осадков и сравнение результатов с прогнозами других гидродинамических моделей.

В докладе приводятся таблицы оценки этих прогнозов в сравнении с другими гидродинамическими прогнозами. По оценкам успешности Пирси-Обухова и предупрежденности явлений первое место занимает гидродинамико-статистический прогноз этих явлений.

В докладе приводятся примеры прогнозов опасного ветра скоростью $V > 24$ м/с, в Омской, Томской, Новосибирской областях и в Алтайском и Красноярском краях, а также сильных и опасных осадков, в частности, в Иркутской области 25–27 июня 2019 года (см. рис.), когда выпадало 67–25 мм осадков, приведших к сильному наводнению.

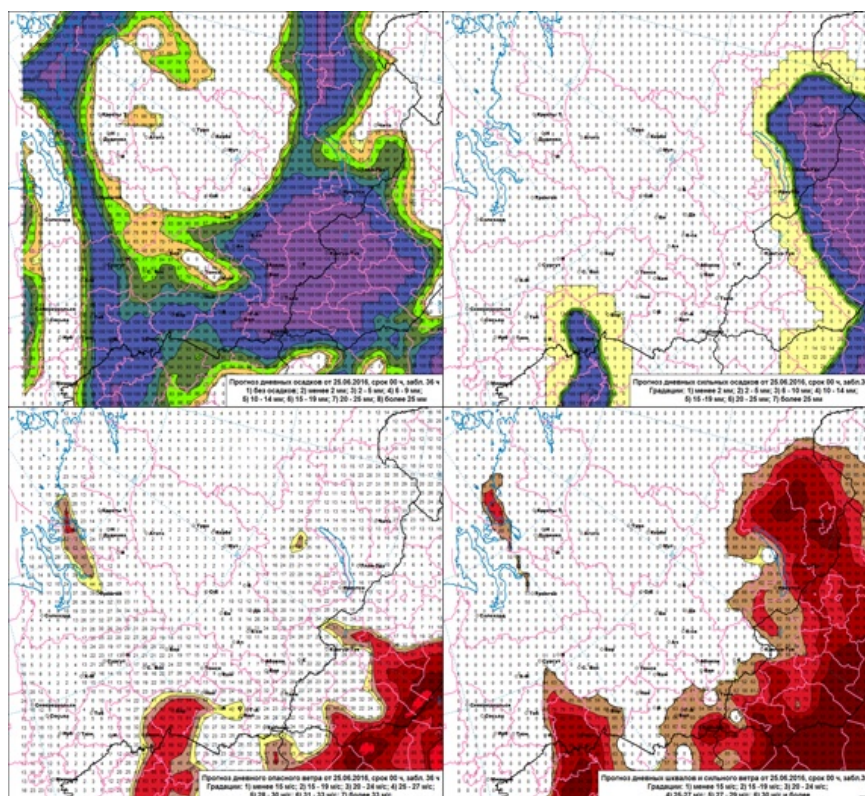


Рис. Области прогноза дневных сильных осадков (рисунок слева в первом ряду) и опасных осадков (рисунок справа в первом ряду) с заблаговременностью 36 ч на 26 июня 2019 г., вызванных глубоким циклоном (рисунок справа в первом ряду). Практически в течение недели с 25 июня 2019 г. и днем, и ночью в Иркутской области были отмечены очень сильные осадки количеством 25–65 мм, вызвавшие сильное наводнение в этом регионе. Осадки сопровождалась ветром с порывами скоростью 18 м/с и более (рис. справа внизу)

С целью уточнения территории прогноза в дальнейшем предполагается использование в статистической модели выходных прогностических полей мезомасштабных моделей, которые пока сами еще не дают успешного прогноза этих сложных опасных явлений.

А. Л. Рабинович, А. Л. Талис (Петрозаводск, ИБ КарНЦ РАН; Москва, ИНЭОС РАН). **Отображение некристаллографической симметрии фосфолипидов биологических мембран: семейства $\omega 3$ и $\omega 6$ жирнокислотных цепей.**

Основу биомембран образуют молекулы фосфолипидов, они содержат полярную головную группу и две углеводородные (жирнокислотные) цепи. Значительная доля в жирнокислотном составе мембран различных органов или тканей организмов принадлежит ненасыщенным и полиненасыщенным цепям [1–3]; их роль в функционировании биомембран очень важна, они оказывают влияние на огромное количество биохимических процессов [1, 2]. Однако процентное содержание разных цепей в биомембранах может варьироваться в широких пределах.

Если выделить из них наиболее распространенные цепи, то оказывается [1,2], что их строение характеризуется некоторыми общими особенностями. Строение ацилов типичных неразветвленных жирных кислот можно представить в виде



где a, d, b — целые числа; C , H и O — атомы углерода, водорода и кислорода, соответственно. В наиболее распространенных цепях первая двойная связь (как правило, имеющая конфигурацию *cis*) обычно расположена у 3-го или 6-го атома углерода, считая от концевой группы CH_3 цепи: семейства $\omega 3$ - (при $b=0$) и $\omega 6$ - (при $b=3$) цепей жирных кислот широко известны [1, 2].

Согласно развиваемой нами концепции [4–6], единство в обсуждаемом строении цепей определяется соответствием «некристаллографических» симметрий фрагментов жирнокислотных цепей симметриям некоторых фрагментов высокосимметричных структур из 3-мерных неевклидовых пространств постоянной положительной (S^3) и/или отрицательной (H^3) кривизны, которые можно отобразить в 3-мерное евклидово пространство E^3 .

Симметрия фрагментов высокосимметричных структур также высока (порядок группы их симметрии достаточно велик), и поэтому фрагменты представляют собой «идеальные образцы». Факт существования образцов является необходимым (хотя и не достаточным) условием для их реализации в конкретных молекулярных системах, аналогично роли федоровских (пространственных) групп для идеальных кристаллов [4].

Насыщенные участки цепей можно считать тетракоординированными структурами: их можно образовать комбинацией двух тетраэдрических цепей, т. е. линейных цепей из правильных тетраэдров, имеющих общие грани. Нами показано [4], что отобразить «некристаллографическую» симметрию тетраэдрической цепи можно с помощью универсальной базовой симметричной структурной единицы: линейного объединения по граням четырех правильных тетраэдров, «тетраблока».

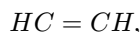
Его аналог для тетракоординированных цепей — это *комбинированный* тетраблок, в двух вариантах — *составной* (14 вершин) и *декорированный* (11 вершин) тетраблок [5].

Группа симметрии составного тетраблока изоморфна группе $PSL(2,7) \cdot Z_2$, где $PSL(2,7)$ — проективная специальная линейная группа (ее порядок 168), Z_2 — группа 2-го порядка.

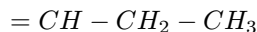
Если два декорированных тетраблока объединить по торцевому ребру (причем, один из тетраблоков — концевой в цепи), то вершины тетраблоков (11+11) после исключения 4-х вершин (торцевое ребро каждого тетраблока содержит 2 вершины) [6] можно разделить на две совокупности по 9 вершин. Они примыкают друг к другу, и в области стыковки структура является плоской [6]. Если при реализации структуры поместить в вершинах атомы углерода C и водорода H , то концевой фрагмент приобретает вид



Очевидно, что область стыковки двух фрагментов представляет собой двойную связь

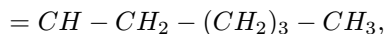


а концевая конфигурация



отвечает положению $\omega 3$ этой двойной связи.

При объединении двух декорированных тетраблоков по двум торцевым вершинам (и исключении 2-х вершин из общего их количества), а затем объединении с третьим декорированным тетраблоком по торцевому ребру (и исключении 2-х вершин этого ребра), получаем концевую 18-вершинную ($11+11-2-2=18$) структуру



отвечающую положению двойной связи $\omega 6$.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (гос. задание КарНЦ РАН № 0218-2019-0076, № г.р. АААА-А17-117031710039-3 — для А.Л.Р.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nelson D. L., Cox M. M. Lehninger Principles of Biochemistry. N.Y.: Freeman W.H. and Co., 2013.
2. Mouritsen O. G., Bagatolli L. A. Life - As a Matter of Fat. Lipids in a Membrane Biophysics Perspective. Heidelberg etc.: Springer, 2016, 298 p.
3. Rabinovich A. L., Lyubartsev A. P., Zhurkin D. V. European Biophys. J. with Biophys. Lett., 2018, v. 47, № 2, p. 109–130.
4. Талис А. Л., Рабинович А. Л. Кристаллография, 2019, v. 64, № 3, p. 341–350.
5. Талис А. Л., Рабинович А. Л. Алмазоподобный 4-мерный многогранник {240} как основа описания некристаллографической симметрии линейных тетракоординированных структур: составные тетраблоки. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 90–92.
6. Рабинович А. Л., Талис А. Л. Углеводородно-подобные цепи с некристаллографической симметрией и комбинированные тетраблоки. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 84–86.

Н. А. Соколов, О. Е. Хрусталеv (Москва, ЦЭМИ РАН). **Имитационные модели механизма управления инновационным развитием.**

На основе экономико-математических методов могут быть построены новые имитационные модели, которые предназначены для совершенствования процессов управления наукоемкими предприятиями. В частности, данные модели могут применяться для совершенствования механизмов инновационного прогресса и обновления выпускаемой предприятиями продукции.

В рыночных условиях механизмы создания новой техники и технологий позволяют существенно увеличить объемы и качество производимой инновационной продукции и снизить риски невыполнения утвержденных планов развития наукоемких производств. Соответствующая комплексная имитационная модель базируется на модельном инструментарии, основы которого изложены в работах К. А. Багриновского и М. К. Исаевой [1,2].

Модель состоит из четырех взаимосвязанных компонент.

Первая компонента предназначена для прогнозирования и определения объемов производственных ресурсов, которые требуются для выполнения утвержденных планов предприятия. В процессе работы данной компоненты модели формируется ресурсный вектор

$$\vec{P} = \{P_i\}, \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, m.$$

Вторая компонента предназначена для определения величин коэффициентов a_j , $j = 1, \dots, n$, характеризующих технологии, используемые для производства устаревшей и новой инновационной продукции. Одновременно с помощью экспертов определяются коэффициенты b_j , $j = 1, \dots, n$, характеризующие финансовые и ресурсные затраты на научные исследования, позволяющие создать и внедрить в реальную практику наукоемкие образцы новых изделий и технологий.

Третья компонента применяется для определения главных параметров модели, позволяющей получить максимально возможное количество конечного продукта нового образца. Для этого определяются прогнозные величины ценовых показателей новых образцов продукции предприятия, что позволяет обосновать цены изделий p_j , $j = 1, \dots, n$, где n — количество изучаемых продуктов. В данной модели входными данными являются объемы производства новых инновационных изделий и уже устаревающих.

В упрощенном виде оптимизационная задача в момент времени t имеет вид

$$F = \sum_{j=1}^n (p_{jt} - a_{jt}) x_{jt} - \sum_{j=1}^n b_{jt} x_{jt}^2 \rightarrow \max$$

при выполнении условий

$$\sum_{i=1}^m q_{ijt} \leq R_{jt}, \quad x_{jt} \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь переменные x_{jt} — искомые интенсивности используемых технологических процессов, $q_{ijt} > 0$ — коэффициент расхода i -го ресурса, необходимого для производства единицы j -го продукта.

Если вектор $z_t = \{z_{jt}\}$ при $j = 1, 2, \dots, n$ представляет собой решение оптимизационной задачи в момент времени t , то величина

$$F_{jt} = b_{jt} z_{jt}^2, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

определяет объем финансирования, который требуется для проведения научных исследований, позволяющих разработать инновационный продукт с номером j .

Для оценки эффективности выполняемой на данном этапе научно-исследовательской работы в имитационной модели предусмотрена обратная взаимосвязь между третьей компонентой в момент времени t и второй компонентой в момент времени $t + 1$. Эта взаимосвязь позволяет оценить влияние результатов проведенных исследований на уменьшение значений расходных параметров и может быть представлена в виде

$$a_{j,t+1} = a_{jt} \exp \{-k_{jt} F_{jt}\},$$

где $k_{jt} > 0$ — показатель эффективности научных исследований, $j = 1, 2, \dots, n$.

Четвертая компонента комплексной имитационной модели содержит главные адаптивные элементы управления наукоемким производственным комплексом.

Следует отметить, что управление реальным процессом наукоемкого производства, обычно выполняется в условиях внедрения новых перспективных стратегий инновационного развития [3], а также неопределенности и рисков, поэтому использовать традиционные законы управления нельзя [4–6]. Предложенный авторами математический инструментарий, базирующийся на комплексной имитационной модели, позволяет повысить точность и эффективность принимаемых управленческих решений. В данном инструментарии используется механизм управления с переменными параметрами. Настройка (изменение) параметров выполняется с помощью алгоритма адаптации, который автоматизированно обрабатывает поступающую информацию об эффективности работы предприятия.

Адаптационный алгоритм формируется по специальной методике, которая позволяет оценивать складывающуюся на предприятии ситуацию и способствовать достижению поставленной цели управления в условиях непредсказуемых изменений процессов производства.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-06-00260-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багриновский К. А. Модели и методы совершенствования механизмов инновационного развития экономики России на основе адаптивного управления. — Экономика и математические методы, 2011, т. 47, № 4, с. 111–121.
2. Багриновский К. А., Исаева М. К. Методы анализа и моделирование механизма обновления продуктов и технологий. — Экономическая наука современной России, 2006, № 3, с. 7–16.
3. Куприн И. Л., Тихонов И. П., Хрусталева О. Е. Концептуальные основы формирования перспективных стратегий инновационного развития высокотехнологичных комплексов. — Национальные интересы: приоритеты и безопасность, 2013, № 16, с. 19–24.
4. Бендикова М. А., Хрусталева Е. Ю. Экономическая безопасность наукоемких производств. — Вопросы экономики, 1999, № 9, с. 119–125.
5. Хрусталева Е. Ю. Финансово-экономическая значимость и рисковость наукоемких инновационных проектов. — Финансовая аналитика: проблемы и решения, 2013, № 8, с. 2–11.
6. Хрусталева Е. Ю., Соколов Н. А., Хрусталева О. Е. Концепция оценки и управления риском при реализации инновационных проектов создания интеллектуальной продукции. — Экономический анализ: теория и практика, 2013, № 44, с. 2–13.

А. Н. Тырсин (Екатеринбург, УрФУ). **Вероятностно-энтропийная концепция устойчивого развития сложных систем.**

В настоящее время одним из актуальных вопросов стала проблема устойчивого развития. Однако многие авторы указывают на концептуальную сложность, которая заключается в том что, понятие «устойчивое развитие» включает в себя два термина: «устойчивость» и «развитие». При этом каждый из этих терминов трактуется не однозначно. Это приводит к появлению разных трактовок устойчивого развития применительно к конкретным системам. Например, в [1] насчитано более 50 различных интерпретаций понятия «устойчивое развитие». Поэтому, представляется актуальной проблемой формулирование некоторой общей концепции устойчивого развития, которую можно конкретизировать для конкретных случаев. Укажем на один из возможных путей решения, основанного на использование системного подхода.

К основным особенностям сложных стохастических систем можно отнести: 1) многомерность; 2) взаимосвязанность компонент; 3) стохастический характер поведения; 4) многокритериальность; 5) разнонаправленность поведения элементов. С учетом этих особенностей представим систему в виде случайного вектора, каждая компонента которого является одномерной случайной величиной, характеризующей функционирование соответствующего элемента системы.

Поскольку «развитие» и «устойчивость» характеризуют различные стороны функционирования сложных систем [2, 3], то будем решать следующие задачи:

- 1°. Выработка интегрального показателя характеризующего эффективное функционирование системы.
- 2°. Обеспечение безопасного функционирования системы. Здесь в контексте устойчивого развития заменяем термин «устойчивость» на «безопасность».
- 3°. Формирование критерия, характеризующего устойчивое развитие в смысле решения первых двух задач.

Гипотеза: Под устойчивым развитием сложной системы будем понимать динамику, состоящую в наличии тенденции сбалансированного изменения векторной энтропии при сохранении приемлемого уровня риска.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 17-01-00315а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Старикова Е. А.* Современные подходы к трактовке концепции устойчивого развития. — Вестник Российского ун-та дружбы народов. Сер. эконом., 2017, т. 25, № 1, с. 7–17.
2. *Tyrsin A. N., Gevorgyan G. G.* Modeling of Sustainable Development of Megacities. In: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2017, v. 72, 9 p. doi: 10.1088/1755-1315/72/1/012010.
3. *Tyrsin A. N., Surina A. A.* Monitoring of Risk of Multidimensional Stochastic System as Tools for a Research of Sustainable Development of Regions. In: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2018, v. 177, 8 p. doi: 10.1088/1755-1315/177/1/012005.

Научная программа симпозиума

- | | | |
|--|---|---|
| Б1. Безопасность компьютерных систем. | Б13. Медицина. | Б28. Системы поддержки принятия решений для регионального управления. |
| Б2. Геометрическая нелинейная оптика. | Б14. Метод конечных элементов. | Б29. Социология. Психология. |
| Б3. Инженерно-технологическая математика. | Б15. Механика жидкости и газа. | Б30. Специальные функции и ортогональные многочлены. |
| Б4. Информационные технологии и задачи связи. | Б16. Механика природных процессов. | Б31. Супер-, нейро-, биокомпьютеры. Эволюционные и мембранные вычисления. |
| Б5. Квантовые вычисления. | Б17. Механика разрушения. | Б32. Теория управления и системные исследования. Процессы принятия решений. |
| Б6. Математические модели для биологических и экологических систем. | Б18. Модели горения и взрыва. | Б33. Тепло- и массоперенос. |
| Б7. Математические модели для жидких кристаллов. | Б19. Нанотехнологии: математические модели. | Б34. Физика океана и атмосферы. |
| Б8. Математические методы в педагогических исследованиях. | Б20. Науки о Земле, геология, геофизика. | Б35. Фракталы и масштабный эффект. |
| Б9. Математические модели в теории оболочек. | Б21. Неклассические задачи для уравнений математической физики. | Б36. Экономика, страховая и финансовая математика. |
| Б10. Математическое моделирование процессов рассеяния примесей в турбулентной атмосфере. | Б22. Некорректные, обратные и условно корректные задачи. | Б37. Энергетика и передача энергии. |
| Б11. Математическое моделирование свойств материалов и конструкций. | Б23. Нелинейное моделирование и управление. | Б38. Юриспруденция. Криминалистика. |
| Б12. Математическое образование. | Б24. Обработка данных, анализ и обработка изображений. | Б39. История российской прикладной математики. |
| | Б25. Прикладная вероятность и статистика. | Б40. Математика чрезвычайных ситуаций. |
| | Б26. Прикладная геометрия. Обработка и распознавание образов. | |
| | Б27. Прикладная дискретная математика. Обработка и защита информации. | |

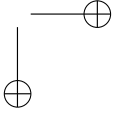
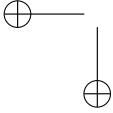
ОБОЗРЕНИЕ
ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
Том 26 МАТЕМАТИКИ Выпуск 4
2019

ДВАДЦАТЫЙ
ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ
(ОСЕННЯЯ ОТКРЫТАЯ СЕССИЯ)
22 сентября — 6 октября 2019 г.
г. Сочи

НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ
Часть III

Под редакцией *И. А. Соколова,*
А. К. Горшенина, А. Р. Симоняна, В. И. Хохлова

МОСКВА • «ОП и ПМ» • 2019



**XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ**
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

**ОРГАНИЗАТОРЫ И СПОНСОРЫ
СИМПОЗИУМА**

- Управление по науке и образованию Администрации г. Сочи
- Сочинский государственный университет, в т. ч.
 - инженерно-экологический факультет
- Сочинский научно-исследовательский центр РАН
- Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии наук
- Академия криптографии Российской Федерации
- Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова*;
- Редакции журналов: «Информатика и ее применения»; «Обозрение прикладной и промышленной математики» (ОПиПМ); «Прикладная информатика»; «Теория вероятностей и ее применения» (Научное издательство «ТВП»)
- Российский национальный комитет по индустриальной и прикладной математике
- Российский Фонд фундаментальных исследований**

(* В стадии согласования.)

** Симпозиум поддержан грантом РФФИ № 19-07-20019.

Объединенный Оргкомитет симпозиума

Академик И. А. Соколов (председатель),
академик В. А. Бабешко, академик А. А. Боровков, академик Ю. Г. Евтушенко,
академик А. Б. Жижченко, академик И. А. Ибрагимов, академик Б. С. Кашин,
академик В. И. Колесников, академик С. В. Кисляков, академик А. Б. Куржанский,
академик В. П. Маслов, академик В. А. Сойфер, академик Б. Н. Четверушкин,
академик А. Н. Ширяев, академик В. П. Шорин,
член-корр. Д. А. Губайдуллин, член-корр. А. В. Ильин, член-корр. А. Ф. Титов,
Ю. Б. Бутин, А. Н. Волков, Л. Ф. Выюненко, В. У. Галустов, А. К. Горшенин,
В. И. Дементьева, А. С. Дудов, А. М. Зубков, С. А. Корниенко, А. А. Левицкая, А. А. Лиховид,
О. Н. Медведева, Ю. М. Окунев*, О. О. Рыбак, А. Р. Симонян, Г. В. Слюсарев, В. И. Хохлов,
А. Б. Чернышев, А. Ф. Чипига, С. Я. Шоргин, Э. Г. Янукян

**Оргбюро Всероссийских симпозиумов
по прикладной и промышленной математике**

Академик И. А. Соколов (председатель),
В. И. Хохлов (зам. председателя),
В. И. Астафьев, Г. И. Белявский, Л. Ф. Выюненко, Л. И. Герасимова (секретарь),
В. В. Мазалов, А. Р. Симонян, Е. И. Улитина

Локальный Оргкомитет

А. Р. Симонян (председатель), Е. И. Улитина (ученый секретарь),
А. В. Волков, С. Ж. Симаворян

НАУЧНАЯ ПРОГРАММА СИМПОЗИУМА (список минисимпозиумов) опубликована на с. 314.

**XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ**
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

**Научные доклады
осенней открытой сессии XX Всероссийского симпозиума
по прикладной и промышленной математике**

Пленарный приглашенный доклад

<i>Астафьев В. И., Ротерс П. В., Касаткин А. Е.</i> Функции Вейерштрасса в задачах подземной гидромеханики	315
--	-----

Секционные и расширенные секционные доклады

<i>Бегишев В. О., Гудкова И. А.</i> Анализ модели обслуживания абонентов NB-IoT в сетях 5G	343
<i>Бесчастный В. А., Скрипкин В. С., Гайдамака Ю. В.</i> Вероятностная модель для анализа разделения устройств беспроводной сети на подгруппы мультимедиа	345
<i>Гарбарь С. В.</i> Моделирование последовательностей с распределением Лапласа с использованием алгоритмов авторегрессии	347
<i>Гончаренко М. Б.</i> О связи двух представлений сигнала с шумом в виде конечной нормальной смеси в форме стохастического дифференциального уравнения	348
<i>Горячев С. С.</i> О решении задачи выделения признаков в сильно зашумленных сигналах ЭЭГ с применением самоорганизующихся карт Кохонена	349
<i>Драницына М. А.</i> Алгоритм восполнения недостающих данных для однородных сигналов.	350
<i>Драницына М. А., Захарова Т. В.</i> Свойства процедуры двух односторонних t -тестов в рамках модели с недостающими данными	352
<i>Иванова Д. В., Маркова Е. В., Гудкова И. А.</i> Пример функционирования беспроводной сети LTE с системой LSA	353
<i>Ильичева И. А., Панченко Л. А., Урошлев Л. А., Абдуллаев Э. Т., Ходыков М. В., Полозов Р. В., Нечипуренко Ю. Д.</i> Механохимическое расщепление ДНК как инструмент анализа функциональных участков генома	354
<i>Ковалевский А. П., Закревская Н. С.</i> Элементарная вероятностная модель литературных текстов и пуассонизация	362
<i>Лисовская Е. Ю., Галилейская А. А., Чернышова Е. Н., Моисеева С. П., Пагано М., Гайдамака Ю. В.</i> Об одном подходе к исследованию ресурсных СМО	363
<i>Медведева В. А., Москалева В. А., Горбунова А. В., Гайдамака Ю. В.</i> О построении модели многопользовательской передачи многоантенной системы MIMO в дискретном времени	365
<i>Рабинович А. Л., Талис А. Л.</i> Полиненасыщенные углеводородные цепи фосфолипидов биомембран с метиленпрерывающимися двойными связями и некристаллографическая симметрия	366
<i>Савушкин Е. В., Захарова Т. В.</i> Исследование существования решения для стохастических дифференциальных уравнений в классе L_p , где $1 < p < 2$	368
<i>Смагулов М. Х.</i> Разработка методики для анализа состояния сельскохозяйственных земель и посевов на основе данных дистанционного мониторинга	371
<i>Соколов Н. А., Хрусталева Е. Ю.</i> Единая система планирования в механизме экономического обеспечения военного строительства	373

- Уанкпо Г. Ж. К., Козырев Д. В., Гудкова И. А. Модель надежности однородной системы передачи данных горячего резервирования с произвольным распределением времени ремонта элементов. 377
- Фисак А. А. Об оптимальных размещениях станций обслуживания на отрезке вещественной прямой 380
- Шумилов Ю. П. Методика обнаружения спектров слабых источников излучения . 381

Научная программа симпозиума

- | | | |
|--|---|---|
| Б1. Безопасность компьютерных систем. | Б13. Медицина. | Б28. Системы поддержки принятия решений для регионального управления. |
| Б2. Геометрическая нелинейная оптика. | Б14. Метод конечных элементов. | Б29. Социология. Психология. |
| Б3. Инженерно-технологическая математика. | Б15. Механика жидкости и газа. | Б30. Специальные функции и ортогональные многочлены. |
| Б4. Информационные технологии и задачи связи. | Б16. Механика природных процессов. | Б31. Супер-, нейро-, биокомпьютеры. Эволюционные и мембранные вычисления. |
| Б5. Квантовые вычисления. | Б17. Механика разрушения. | Б32. Теория управления и системные исследования. Процессы принятия решений. |
| Б6. Математические модели для биологических и экологических систем. | Б18. Модели горения и взрыва. | Б33. Тепло- и массоперенос. |
| Б7. Математические модели для жидких кристаллов. | Б19. Нанотехнологии: математические модели. | Б34. Физика океана и атмосферы. |
| Б8. Математические методы в педагогических исследованиях. | Б20. Науки о Земле, геология, геофизика. | Б35. Фракталы и масштабный эффект. |
| Б9. Математические модели в теории оболочек. | Б21. Неклассические задачи для уравнений математической физики. | Б36. Экономика, страховая и финансовая математика. |
| Б10. Математическое моделирование процессов рассеяния примесей в турбулентной атмосфере. | Б22. Некорректные, обратные и условно корректные задачи. | Б37. Энергетика и передача энергии. |
| Б11. Математическое моделирование свойств материалов и конструкций. | Б23. Нелинейное моделирование и управление. | Б38. Юриспруденция. Криминалистика. |
| Б12. Математическое образование. | Б24. Обработка данных, анализ и обработка изображений. | Б39. История российской прикладной математики. |
| | Б25. Прикладная вероятность и статистика. | Б40. Математика чрезвычайных ситуаций. |
| | Б26. Прикладная геометрия. Обработка и распознавание образов. | |
| | Б27. Прикладная дискретная математика. Обработка и защита информации. | |

Секция «Неклассические задачи
для уравнений математической физики»

АСТАФЬЕВ В. И., РОТЕРС П. В., КАСАТКИН А. Е.

**ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА
В ЗАДАЧАХ ПОДЗЕМНОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ ¹⁾**

Исходя из того, что большая часть современных месторождений находится на позднем этапе разработки, появляется необходимость вовлечения в добычу трудноизвлекаемых запасов, разработка которых возможна только с применением методов увеличения нефтеотдачи. Так, например, многие низкопроницаемые пласты или вовсе непроницаемые глинистые сланцы разрабатываются с применением массового гидроразрыва пласта. Кроме того, как показывают многие современные исследования, большая часть месторождений осложнена разломами различной проницаемости. Данные разрывные нарушения оказывают существенное влияние на разработку месторождений и на работу конкретных скважин.

Рассмотрен вопрос о граничных условиях задачи о фильтрации жидкости в пласте, осложненном несплошностью по проницаемости. Данная несплошность представляет собой узкую протяженную область, которая может быть как технологической трещиной ГРП, так и тектоническим разрывным нарушением.

Ключевые слова и фразы: фильтрация жидкости, закон Дарси, гидроразрыв пласта, несплошность пласта

Содержание

Введение.	316
§ 1. Эллиптические функции Вейерштрасса.	317
§ 2. Плоская задача теории фильтрации.	319
§ 3. Решение для двоякопериодической системы добывающих скважин.	322
§ 4. Решение для n -скважинного двоякопериодического кластера	327
§ 5. Оптимальное размещение скважин в кластере	329
5.1. Двухскважинный кластер	329
5.2. Трехскважинный кластер	331
§ 6. Замкнутый резервуар с прямоугольным контуром питания	334
§ 7. Моделирование площадного заводнения с помощью двоякопериодической системы скважин.	336
Заключение	340
Список литературы	341

© Редакция журнала «ОПиПМ», 2019 г.

) © Редакция журнала «ОПиПМ», 2019 г.

¹⁾ От Редакции. Публикуется по решению Оргбюро ВСППМ в качестве расширенной версии приглашенного пленарного доклада на осенней открытой сессии XX Всероссийского симпозиума по прикладной и промышленной математике (Сочи, 22 сентября–6 октября 2019 г.), поддержанного грантом РФФИ № 19-07-20019.

Введение

Эллиптические функции Вейерштрасса (однозначные двоякопериодические функции комплексной переменной $z = x + iy$), единственными особенностями которых на комплексной плоскости z являются полюсы, широко применяются в различных приложениях механики и физики. Здесь следует отметить монографию [1], содержащую элементы теории эллиптических функций с приложениями к задачам механики. В задачах механики деформируемого твердого тела эллиптические функции использовались при расчетах перфорированных пластин и оболочек [2], пластин и оболочек с двоякопериодической системой трещин [3, 4], а также в исследованиях движения винтовых дислокаций в кристаллах [5]. В задачах аэро- и гидродинамики основная область их применения — это обтекание двоякопериодических решеток профилей [6], движение двоякопериодических систем точечных вихрей [7] и др.

В настоящей работе рассматривается возможность применения эллиптических функций Вейерштрасса в нефтедобывающей отрасли.

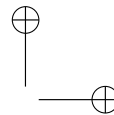
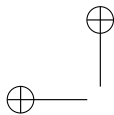
В начальной стадии разработки нефтяного месторождения пластового давления, как правило, достаточно для обеспечения притока нефти к скважине. Впоследствии пластовое давление постепенно снижается и для его поддержания требуется проведение специальных мероприятий (закачка воды, газа и т. п.). В зависимости от того, за счет чего происходит восполнение энергии пласта и обеспечивается продвижение нефти к добывающей скважине, методы разработки месторождений подразделяют на три класса: первичные методы (Primary Recovery); вторичные методы (Secondary Recovery); третичные методы (Tertiary Recovery).

Первичные методы разработки основаны на извлечении нефти с использованием потенциала внутренней энергии пласта. Приток нефти обеспечивается за счет естественных сил. На последующих стадиях разработки месторождений применяют вторичные или третичные методы воздействия на снижающуюся энергию пласта.

Вторичные методы разработки основаны на искусственном поддержании пластового давления. В этом случае извлечение нефти из пласта происходит с использованием поддержания внутрипластовой энергии за счет закачки в пласт воды или газа. Вторичные методы разработки нефтяных месторождений являются наиболее распространенными.

К третичным методам разработки относят методы, основанные на извлечении нефти за счет закачки агентов, отличающихся от используемых при вторичных методах повышенным потенциалом вытеснения нефти: тепловые, газовые, химические, микробиологические.

Для двоякопериодических систем нефтедобывающих скважин первичному методу разработки месторождений без поддержания пластового давления была посвящена монография [8]. Вторичный метод разработки месторождений двоякопериодическими системами скважин путем заводнения пласта был рассмотрен в монографиях [9–11].



§ 1. Эллиптические функции Вейерштрасса

Эллиптическая функция в комплексном анализе — это периодическая в двух направлениях функция, заданная на комплексной плоскости. Наиболее известная среди эллиптических функций — P -функция Вейерштрасса. Ее можно представить [1] как

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\}, \quad (1.1)$$

где $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), ω_1 и ω_2 — периоды P -функции, а знак ' после суммы указывает на исключение из нее нулевого слагаемого, соответствующего значениям $m = n = 0$. Как видно из (1.1), P -функция обладает в точках $z = \omega$ полюсами второго порядка.

Основным свойством P -функции является ее двоякая периодичность

$$P(z + \omega_1) = P(z), \quad P(z + \omega_2) = P(z). \quad (1.2)$$

Производные P -функции также являются двоякопериодическими, а любая эллиптическая функция может быть представлена в виде линейной комбинации P -функции и ее производных.

Интегрирование P -функции (1.1) может быть записано как

$$-\int P(z) dz = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right\} = \zeta(z), \quad (1.3)$$

где $\zeta(z)$ — ζ -функция Вейерштрасса.

Интегрирование ζ -функции (1.3) приводит к появлению σ -функции Вейерштрасса

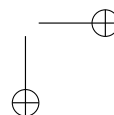
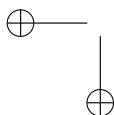
$$\int \zeta(z) dz = \ln z + \sum'_{m,n=-\infty}^{\infty} \left\{ \ln \left(\frac{z-\omega}{\omega} \right) + \frac{z}{\omega} + \frac{z^2}{2\omega^2} \right\} = \ln \sigma(z). \quad (1.4)$$

Таким образом, функции $\zeta(z)$ и $\sigma(z)$ получаются в результате интегрирования $P(z)$, но, в отличие от $P(z)$, не обладают свойством двоякой периодичности. Вместо условий (1.2) для них выполняются условия квазипериодичности [1]

$$\begin{aligned} \zeta(z + \omega_1) &= \zeta(z) + 2\eta_1, \\ \zeta(z + \omega_2) &= \zeta(z) + 2\eta_2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \ln \sigma(z + \omega_1) &= \ln \sigma(z) + \eta_1(2z - \omega_1), \\ \ln \sigma(z + \omega_2) &= \ln \sigma(z) + \eta_2(2z - \omega_2), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\eta_1 = \zeta(\omega_1/2)$, $\eta_2 = \zeta(\omega_2/2)$.



Величины η_1, η_2, ω_1 и ω_2 связаны следующим соотношением [1]:

$$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \pi i. \quad (1.7)$$

Периоды ω_1 и ω_2 могут быть произвольными комплексными числами с ограничением $\text{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ и образуют двоякопериодическую решетку L . Решетка L и ее базовый элемент (основной параллелограмм периодов), изображены на рис. 1.1.

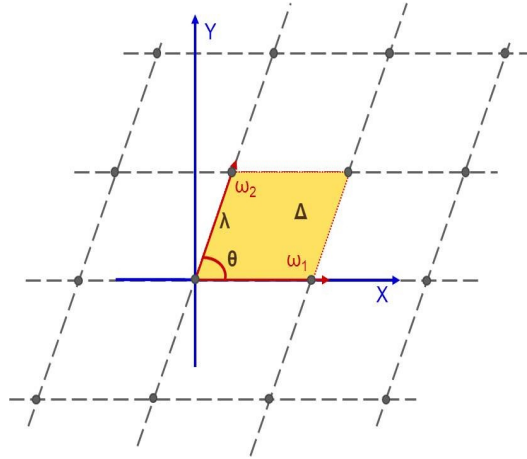


Рис. 1.1. Двоякопериодическая решетка L и ее основной параллелограмм периодов

Основными параметрами параллелограмма периодов являются

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \lambda e^{i\theta} \quad \text{и} \quad \Delta = |\omega_1|^2 \lambda \sin \theta.$$

Здесь λ задает отношение сторон, θ — угол между сторонами, а Δ — площадь параллелограмма периодов.

Все многообразие решеток L характеризуется параметром τ , меняющимся в фундаментальной области определения

$$D_0 = \left\{ \tau : |\text{Re } \tau| < \frac{1}{2}, |\tau| > 1 \right\}$$

(в силу симметрии можно ограничиться половиной области).

Ось $\{\text{Re } \tau = 0, 1 < \text{Im } \tau < \infty\}$ соответствует всем прямоугольным решеткам; дуга $\{|\tau| = 1, \pi/3 < \theta < \pi/2\}$ — ромбическим решеткам с углом θ , меняющимся в диапазоне $[\pi/3, \pi/2]$, прямая линия $\{\text{Re } \tau = 1/2, \sqrt{3}/2 < \text{Im } \tau < \infty\}$ — ромбическим решеткам с углом θ , меняющимся в диапазоне $[0, \pi/3]$ (рис. 1.2).

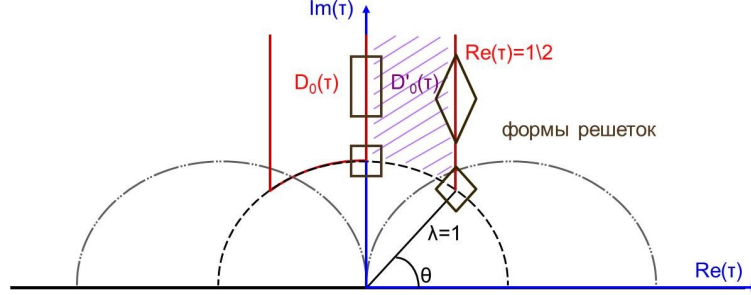


Рис. 1.2. Фундаментальная область D_0 и соответствующие границе области параллелограммы периодов

§ 2. Плоская задача теории фильтрации

Рассмотрим нестационарную фильтрацию вязкой слабосжимаемой жидкости в плоском замкнутом резервуаре объемом $V = h \Delta$, где Δ — площадь резервуара, а h — его толщина. Движение жидкости в резервуаре можно описать уравнением неразрывности и законом фильтрации Дарси [12]:

$$\frac{m}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.2)$$

где ρ, μ — плотность и вязкость жидкости, k, m — проницаемость и пористость пласта, p — пластовое давление, v_x, v_y — компоненты вектора скорости фильтрации.

Величину

$$\frac{m}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

можно записать в виде [12]

$$\frac{m}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = m C_p \frac{dP}{dt},$$

где

$$C_p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$$

— коэффициент сжимаемости жидкости, $P(t)$ — среднее пластовое давление. Из условия баланса жидкости в замкнутом резервуаре с расположенной в нем добывающей скважиной дебитом $Q(t)$ можно записать, что

$$m C_p \frac{dP}{dt} = -\frac{Q}{h \Delta}.$$

Уравнения (2.1) и (2.2) образуют полную систему уравнений, которая описывает процесс нестационарной фильтрации жидкости в замкнутом резервуаре объема $V = h \Delta$ к добывающей скважине с дебитом $Q(t)$.

Общее решение системы (2.1)–(2.2) легко записать, если вместо переменных x и y ввести комплексную переменную $z = x + iy$, а вместо компонент вектора скорости фильтрации v_x и v_y — комплексную функцию скорости $V = v_x + i v_y$. В этом случае система (2.1)–(2.2) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} = \frac{Q}{h \Delta}, \quad (2.3)$$

$$V = -\frac{2k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}, \quad \bar{V} = -\frac{2k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Решение системы (2.3)–(2.4) можно представить как

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{2h\Delta} z - \overline{F'(z)}, \\ \bar{V} &= -\frac{Q}{2h\Delta} \bar{z} - F'(z), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$p = \frac{\mu}{2k} \left(F(z) + \overline{F(z)} - \frac{Q}{2h\Delta} z \bar{z} + C \right), \quad (2.6)$$

где $F(z)$ — функция, аналитическая в области размещения резервуара, C — константа.

Чтобы найти функцию $F(z)$, необходимо использовать следующие граничные условия: равенство давления p на контуре скважины радиуса r_w внутрискважинному давлению p_w —

$$p|_{z=r_w e^{i\theta}} = p_w, \quad (2.7)$$

равенство потока жидкости через контур скважины величине дебита скважины Q —

$$h \int_0^{2\pi} v_n r_w d\theta = -Q \quad (2.8)$$

и отсутствие притока жидкости через границу Γ резервуара (замкнутость резервуара) —

$$v_n|_{\Gamma} = 0. \quad (2.9)$$

Нормальную компоненту вектора скорости v_n можно представить в виде

$$v_n ds = \operatorname{Im}(V dz),$$

где $z = z(s)$ — уравнение контура Γ в комплексной форме.

Тогда, исходя из условий (2.7) и (2.8) и учитывая, что отношение площади скважины πr_w^2 к площади резервуара Δ мало, можно записать общий вид функции $F(z)$ и найти константу C :

$$F(z) = \frac{Q}{2\pi h} \left(\ln z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right),$$

$$C = \frac{2k}{\mu} p_w - \frac{Q}{2\pi h} \ln r_w^2. \quad (2.10)$$

Таким образом, в случае замкнутого резервуара площадью Δ с границей Γ , внутри которого в точке $z = 0$ расположена одиночная добывающая скважина с дебитом $Q(t)$, общее решение системы (2.3)–(2.4) в комплексных переменных будет иметь вид

$$\bar{V}(z, \bar{z}) = -\frac{Q}{2\pi h} \left(\frac{1}{z} + F'_0(z) - \frac{\pi}{\Delta} \bar{z} \right), \quad (2.11)$$

$$p(z, \bar{z}) = p_w + \frac{Q\mu}{4\pi k h} \left(\ln \frac{z\bar{z}}{r_w^2} + F_0(z) + \overline{F_0(z)} - \frac{\pi}{\Delta} z\bar{z} \right). \quad (2.12)$$

Как видим, в составе общего решения (2.11)–(2.12) присутствует функция $F_0(z)$ — неизвестная аналитическая функция комплексной переменной z . Для ее нахождения необходимо воспользоваться граничным условием (2.9) — условием отсутствия притока жидкости извне в резервуар через его границу Γ . Если граница резервуара $z = z(s)$ известна, то функция $F_0(z)$ находится из решения краевой задачи следующего вида:

$$\operatorname{Im} F_0(s) = \frac{2\pi}{\Delta} \Sigma(s) - \theta(s). \quad (2.13)$$

где s — длина дуги точки P на границе Γ , $\theta(s)$ — полярный угол точки P , а $\Sigma(s)$ — площадь сектора с длиной дуги s , как показано на рис. 2.1.

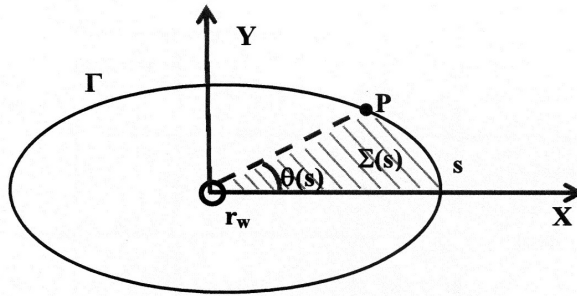
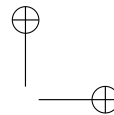
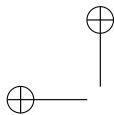


Рис. 2.1. Замкнутый резервуар с границей Γ и размещенной внутри него добывающей скважиной радиуса r_w



§ 3. Решение для двоякопериодической системы добывающих скважин

Представленное в (2.11)–(2.12) решение относится к случаю, когда одиночная скважина размещена в замкнутом резервуаре (область питания скважины) с заранее известной границей резервуара (контур питания скважины). При многоскважинной системе разработки месторождения область питания и контур питания каждой из скважин, разрабатывающих нефтеносный пласт, зависят как от взаимного расположения скважин, так и от величины их дебитов. Чтобы обобщить построенное решение (2.11)–(2.12) на многоскважинную систему с неизвестным заранее контуром питания, рассмотрим случай, когда месторождение разрабатывается системой добывающих скважин одинаковой мощности $Q(t)$, размещенных в узлах двоякопериодической решетки L (рис. 1.1). В этом случае функция $F'(z)$ в (2.5), определяющая характер течения жидкости к каждой из скважин, должна иметь во всех узлах решетки L полюсы первого порядка с одинаковыми по величине вычетами, определяемыми дебитом каждой скважины. Математически это означает, что вблизи точек $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$ ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) на комплексной плоскости искомая функция должна иметь вид

$$F'(z) = \frac{Q}{2\pi h} (z - \omega) + F'_0(z - \omega).$$

К данному условию следует также добавить условие периодичности характера течения жидкости, т.е. условие двоякой периодичности функции $F'(z)$. Такую функцию можно записать в следующем виде [8]:

$$F'(z) = \frac{Q}{2\pi h} (\zeta(z) + \alpha z), \quad (3.1)$$

где

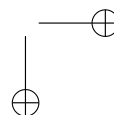
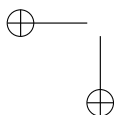
$$\alpha = \left(\beta \bar{\omega} - 2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) \right), \quad \beta = \frac{\pi}{\Delta}.$$

Таким образом, характер течения жидкости к двоякопериодической системе добывающих скважин, размещенных в узлах решетки L , определяется следующей комплексно-сопряженной функцией [8]

$$\bar{V}(x, y) = -\frac{Q}{2\pi h} (\zeta(z) + \alpha z - \beta \bar{z}), \quad (3.2)$$

скорости $v_x(x, y) - i v_y(x, y)$, а распределение давления в пласте с двоякопериодической системой добывающих скважин определяется следующей зависимостью [8]:

$$p(x, y) = p_w + \frac{Q}{2\pi k h} \left[\operatorname{Re} \left(\ln \sigma(z) + \alpha \frac{z^2}{2} - \beta \frac{z \bar{z}}{2} \right) - \ln r_w \right]. \quad (3.3)$$



На рис. 3.1 изображен характер течения жидкости (линии тока) к скважинам в их контурах питания для квадратной и ромбической решеток.

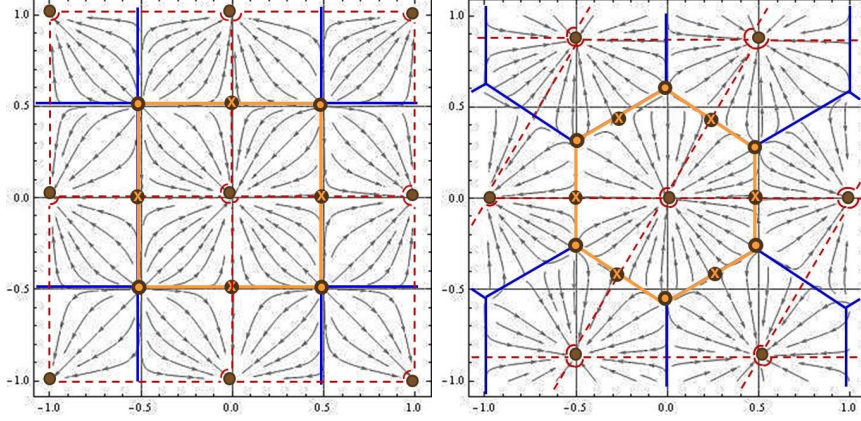


Рис. 3.1. Характер течения жидкости в квадратной и ромбических решетках

Используя выражение (3.3) для распределения давления $p(x, y, t)$, можно найти среднее давление $P(t)$ в параллелограмме периодов, которое, в силу двоякой периодичности функции $p(x, y, t)$, совпадет со средним пластовым давлением [15]. Для среднего давления $P(t)$ выражение (3.3) примет вид формулы Дюпюи [12]:

$$P(t) - p_w = \frac{Q(t)\mu}{2\pi kh} (\ln R - \ln r_w), \quad (3.4)$$

где R — приведенный радиус контура питания скважины, т.е. радиус кругового контура питания замкнутого резервуара, у которого при заданной депрессии давления

$$P(t) - p_w$$

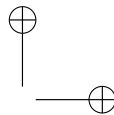
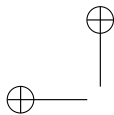
достигается тот же дебит $Q(t)$. Приведенный радиус контура питания R определяется следующим образом [15]:

$$R = \sqrt{\frac{\Delta}{4\pi^2 \operatorname{Im} \tau \left| \sqrt[6]{qq_1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2 \right|}}, \quad (3.5)$$

где

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \lambda e^{i\theta},$$

а $q = e^{i\pi\tau}$, $q_1 = e^{-i\pi/\tau}$ — параметры Якоби.



Аналогичное (3.4) выражение для величины депрессии давления $P(t) - p_w$ в скважинах с различными контурами питания было записано в работе [16] в следующем виде:

$$P(t) - p_w = \frac{Q(t)\mu}{2\pi kh} \ln \frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2} \quad (3.6)$$

где $\gamma = 1,781$, а C_A — безразмерный коэффициент формы контура питания или *коэффициент Дитца* (Dietz), Δ — площадь контура питания. Сравнивая (3.4) и (3.6), можно установить зависимость между коэффициентом C_A и приведенным радиусом контура питания R :

$$\gamma C_A = \frac{4\Delta}{R^2} = 16\pi^2 \operatorname{Im} \tau \left| \sqrt[6]{q q_1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^2 (1 - q_1^{2n})^2 \right|. \quad (3.7)$$

Следует отметить, что величина C_A в работе [16] была вычислена с помощью метода «мнимых источников» для ограниченного числа контуров питания прямоугольной и треугольной формы, в то время как аналитическое выражение (3.5) для параметра R позволяет вычислять его значение (а, значит, и значение C_A по формуле (3.7)) для произвольной формы контура питания.

В случае прямоугольной решетки ($\theta = \pi/2$, $\tau = i\lambda$), формулу (3.7) можно представить как

$$\gamma C_A = 16 K K' \sqrt[3]{(2k k_1)^2}, \quad (3.8)$$

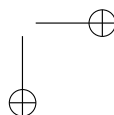
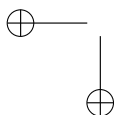
где $K = K(k)$ и $K' = K(k_1)$ — полные эллиптические интегралы, k и $k_1 = \sqrt{1 - k^2}$ — основной и дополнительный модули этих интегралов [1]. Величина k в случае прямоугольной решетки связана со значением параметра решетки λ следующим образом [1]:

$$\lambda = \frac{K(\sqrt{1 - k^2})}{K(k)}. \quad (3.9)$$

В частности, для квадратной решетки

$$\lambda = 1, \quad k_1 = k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = K'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,8541.$$

В результате из (3.8) следует, что $C_A = 30,8832$. В работе [16] значение C_A было найдено численно путем суммирования условно сходящихся рядов и оказалось равным 30,88.



Результаты вычислений C_A по формуле (3.8) графически изображены на рис. 3.2 и приведены в таблице 3.1. В этой таблице приведены также численные значения C_A , полученные другими авторами с помощью метода «мнимых источников» [16, 17].

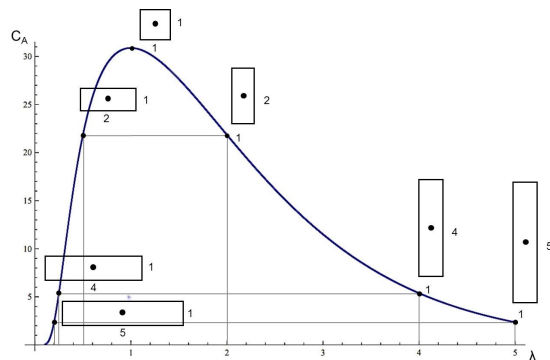


Рис. 3.2. График зависимости коэффициента Дитца C_A от параметра в случае прямоугольных решеток

Таблица 3.1. Значения коэффициента C_A , вычисленные по формуле (3.7), и их сравнение с данными из других источников (Dietz [16], Peaceman [17])

	C_A				C_A		
	(3.7)	[16]	[17]		(3.7)	[16]	[17]
	31.6	-	-		12.984	12.9	12.985 1
	30.881	30.9	30.8828		4.522	4.57	4.5132
	31.548	31.6	-		10.837	10.8	10.837 4
	27.321	27.6	-		4.522	4.86	4.5141
	26.493	27.1	-		2.081	2.07	2.0769
	21.918	21.9	-		2.689	2.72	
	21.836	22.6	21.8309		0.232	0.232	0.2318
	5.378	5.38	5.3780		0.116	0.115	0.1155
	2.359	2.36	2.3606		3.335	3.39	3.3351

Из анализа графической зависимости $C_A(\lambda)$ (рис. 3.2) видно, что квадратная решетка является наиболее оптимальной среди всех прямоугольных решеток размещения скважин, так как коэффициент продуктивности

$$PI = \frac{Q(t)}{P(t) - p_w} = \frac{4\pi kh}{\mu} \left(\ln \frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2} \right)^{-1}$$

такой решетки является максимальным среди множества всех прямоугольных решеток, имеющих одинаковую площадь контура питания Δ .

Возникает естественный вопрос: является ли квадратная решетка размещения скважин наиболее производительной из всех возможных способов размещения скважин при разработке месторождения? Для ответа на этот вопрос необходимо обратиться к исходному выражению (3.7) зависимости коэффициента C_A от параметра решетки $\tau = \omega_2/\omega_1 = \lambda e^{i\theta}$ и найти τ , при котором величина C_A будет максимальной.

На основании симметричной зависимости коэффициента C_A от параметров $q = e^{i\pi\tau}$ и $q_1 = e^{-i\pi/\tau}$ можно заключить, что наибольшее значение параметр C_A будет принимать в случае, когда $|q| = |q_1|$. Данное условие выполняется только для ромбических решеток, т. е. при

$$\tau = e^{i\theta} \quad \text{и} \quad |q| = |q_1| = e^{-\pi \sin \theta}.$$

В этом случае формула (3.7) примет следующий вид:

$$\gamma C_A = 16\pi^2 \sin \theta \left| \sqrt[3]{q} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^4 \right|. \quad (3.11)$$

Результаты вычислений по формуле (3.11) характера изменения функции $C_A(\theta)$ для ромбической решетки представлены на рис. 3.3 и в таблице 3.1 на с. 325.

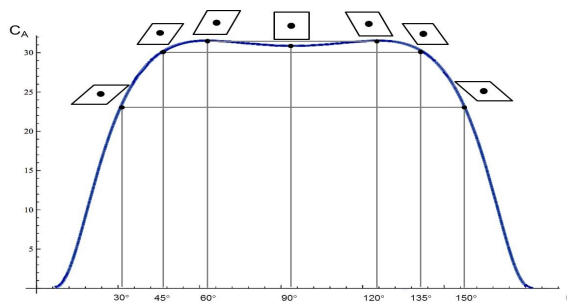


Рис. 3.3. График зависимости коэффициента Дитца C_A от угла θ у вершины в случае ромбических решеток

§ 4. Решение для n -скважинного двоякопериодического кластера

Рассмотрим двоякопериодическую решетку L , в которой в точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ произвольным образом размещено n вертикальных скважин с дебитами $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ (n -скважинный двоякопериодический кластер). С помощью метода суперпозиции комплексносопряженную функцию скорости для двоякопериодической системы скважин, размещенных в узлах решетки L , представленную в § 3 соотношением (3.2), можно обобщить на случай n -скважинного кластера как

$$\bar{V}(x, y) = - \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi h} (\zeta(z - z_k) + \alpha(z - z_k) - \beta(\bar{z} - \bar{z}_k)) \quad (4.1)$$

Аналогично для функции давления $p(x, y)$ можно записать, что

$$p(x, y) = \sum_{k=1}^n q_k \left[\operatorname{Re} \left(\ln \sigma(z - z_k) + \alpha \frac{(z - z_k)^2}{2} \right) - \beta \frac{|z - z_k|^2}{2} \right] + C, \quad (4.2)$$

где

$$q_k = \frac{Q_k}{2\pi k h}$$

— приведенный дебит k -й скважины, C — константа.

Для нахождения константы C вычислим среднее давление в параллелограмме периодов, которое, в силу двоякой периодичности функции $p(x, y, t)$, будет совпадать со средним пластовым давлением $P(t)$. С учетом результатов, представленных в работах [14, 15], выражение (4.2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} P(t) - p(x, y) &= \sum_{k=1}^n q_k \left(\ln R - \left[\operatorname{Re} \left(\ln \sigma(z - z_k) + \alpha \frac{(z - z_k)^2}{2} \right) - \beta \frac{|z - z_k|^2}{2} \right] \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

С помощью выражения (4.3) можно найти величину давления p_w^i на контуре i -й скважины радиуса r_w , т. е. когда $z - z_i = r_w e^{i\theta}$:

$$P(t) - p_w^i = \sum_{k=1}^n q_k(t) (\ln R - \ln R_{ik}), \quad (4.4)$$

где

$$\ln R_{ik} = \begin{cases} \operatorname{Re} \left(\ln \sigma(z - z_k) + \alpha \frac{(z - z_k)^2}{2} \right) - \beta \frac{|z - z_k|^2}{2} & \text{при } i \neq k, \\ \ln r_w & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Величины

$$\ln R - \ln R_{ik} = \ln \frac{R}{R_{ik}} = a_{ik}$$

являются элементами симметричной матрицы, названной в работах [18, 19] *матрицей влияния*, так как они отражают влияние дебита q_k k -й скважины на депрессию Δp_i давления в i -й скважине. В работах [18, 19] элементы матрицы влияния a_{ik} были найдены только для прямоугольных решеток, в то время как соотношение (4.4) распространяет их использование на произвольные двоякопериодические решетки.

Из соотношения (4.4) можно получить выражения для вычисления безразмерных коэффициентов продуктивности $J_i = q_i / \Delta p_i$ каждой из добывающих скважин и общего коэффициента продуктивности всего кластера

$$J = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_i} &= \sum_{k=1}^n s_{ki} \ln \frac{R}{R_{ik}}, \\ \frac{1}{J} &= \sum_{k=1}^n s_k \frac{1}{J_k} = \sum_{k=1}^n s_k a_k, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$s_{ki} = \frac{q_k}{q_i}, \quad s_k = \frac{q_k}{q_1 + q_2 + \dots + q_n}$$

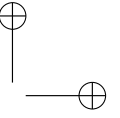
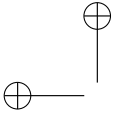
— относительные дебиты скважин по отношению друг к другу и к суммарному дебиту кластера в целом,

$$a_k = \sum_{i=1}^n \ln \frac{R}{R_{ik}}.$$

Как видим, величина J зависит как от величины дебита каждой из скважин рассматриваемого кластера, так и от расположения скважин в выбранном параллелограмме периодов решетки L . Величина J применительно к прямоугольным решеткам была введена в работе [19] и названа *коэффициентом продуктивности многоскважинной системы* (MPI — multiwell productivity index). В данной работе эта величина обобщена на случай произвольных двоякопериодических решеток.

В односкважинных двоякопериодических системах, рассмотренных в работах [14, 15], коэффициент продуктивности скважины J_0 был записан в виде

$$\frac{1}{J_0} = \ln \frac{R}{r_w} = \frac{1}{2} \ln \frac{4\Delta}{\gamma C_A r_w^2}. \quad (4.6)$$



Поэтому и в случае многоскважинной системы величину J_k коэффициента продуктивности k -й скважины можно представить в аналогичном (4.6) виде

$$\frac{1}{J_k} = \frac{1}{2} \ln \frac{4\Delta_k}{\gamma C_A^{(k)} r_w^2}, \quad (4.7)$$

где $C_A^{(k)}$ — коэффициент формы контура питания k -й скважины в многоскважинной системе, Δ_k — площадь области питания k -й скважины. Следует отметить, что

$$\frac{\Delta_k}{\Delta} = \frac{q_k}{q_1 + q_2 + \dots + q_n} = s_k. \quad (4.8)$$

Тогда из соотношений (4.5)–(4.8) можно получить следующее выражение для коэффициента формы контура питания k -й скважины $C_A^{(k)}$:

$$\frac{C_A^{(k)}}{C_A} = s_k \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{\gamma C_A R_{ik}^2}{4\Delta} \right)^{s_{ki}}. \quad (4.9)$$

§ 5. Оптимальное размещение скважин в кластере

Задача оптимизации разработки месторождения двоякопериодическим кластером сводится к поиску оптимального размещения скважин в выбранной двоякопериодической решетке с целью достижения максимального значения коэффициента продуктивности J .

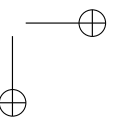
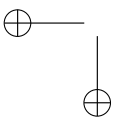
5.1. Двухскважинный кластер. В случае двух скважин, размещенных произвольным образом в двоякопериодической решетке L , соотношения для безразмерных коэффициентов J_1 и J_2 продуктивностей каждой из скважин, коэффициентов формы $C_A^{(1)}$ и $C_A^{(2)}$ каждой из скважин и коэффициента продуктивности J всей двухскважинной системы можно записать в виде

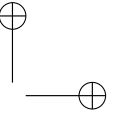
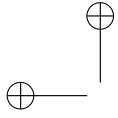
$$\begin{aligned} \frac{1}{J_1} &= \frac{1}{J_0} + s_{21} \ln \frac{R}{R_{12}}, \\ \frac{1}{J_2} &= \frac{1}{J_0} + s_{12} \ln \frac{R}{R_{12}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} &= \frac{1}{J_0} + \ln \frac{R}{R_{12}}, \\ \frac{C_A^{(1)}}{C_A} &= s_1 \left(\frac{\gamma C_A R_{12}^2}{4\Delta} \right)^{s_{12}}, \\ \frac{C_A^{(2)}}{C_A} &= s_2 \left(\frac{\gamma C_A R_{12}^2}{4\Delta} \right)^{s_{21}}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$s_{12} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{1}{s_{21}}.$$





Из соотношений (5.1) видно, что величина J любой двухскважинной системы выбранной решетки L не зависит от величин q_1 и q_2 дебита каждой из скважин и при $q_2 > q_1$ удовлетворяет неравенству $J_2 > J > J_1$. Следовательно, величина J будет максимальна при любых значениях дебитов q_1 и q_2 каждой из скважин, но при условии, что величина R_{12} (или $\ln R_{12}$), характеризующая расположение скважин в параллелограмме периодов, максимальна. Физический смысл величины $\ln R_{12}$ вытекает из общего выражения для $\ln R_{ik}$:

$$\ln R_{12} = \operatorname{Re} \left(\ln \sigma(z_1 - z_2) + \alpha \frac{(z_1 - z_2)}{2} \right) - \beta \frac{|z_1 - z_2|^2}{2}. \quad (5.3)$$

Учитывая, что давление $p_k(x, y)$ от действия размещенной в точке (x_k, y_k) k -й скважины с дебитом q_k выражается в виде

$$p_k(x, y) = q_k \left[\operatorname{Re} \left(\ln \sigma(z - z_k) + \alpha \frac{(z - z_k)}{2} \right) - \beta \frac{|z - z_k|^2}{2} \right],$$

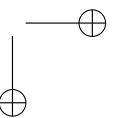
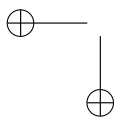
видим, что физический смысл величины $\ln R_{ik}$ — это значение давления в точке z_i , когда скважина единичного дебита $q_k = 1$ размещена в точке z_k .

Принимая во внимание двоякую периодичность системы, решетку L всегда можно сместить так, чтобы точка $z = 0$ решетки L совпала с точкой z_1 расположения первой скважины, тогда вторая скважина, размещенная в точке z_2 , будет находиться в некоторой точке внутри или на границе решетки L . Следовательно, точки, где величина $\ln R_{12}$ достигает своего экстремума — это критические точки, в которых вектор скорости удовлетворяет соотношению $\bar{V}(z, \bar{z}) = \bar{0}$.

Как показал анализ, выполненный в работе [14], у любой двоякопериодической решетки в параллелограмме периодов имеется по крайней мере три критические точки, где $\bar{V}(z, \bar{z}) = \bar{0}$. Это — точки полупериодов

$$\frac{\omega_1}{2}, \quad \frac{\omega_2}{2}, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Кроме этого, у ромбических решеток, близких к гексагональным, появляется еще одна критическая точка $(\omega_1 + \omega_2)/3$. Таким образом, «претендентами» на оптимальное размещение второй скважины в параллелограмме периодов, при котором будет достигаться максимальное значение коэффициента продуктивности двухскважинной системы, будут точки $\omega_1/2$, $\omega_2/2$, $(\omega_1 + \omega_2)/2$, а также точка $(\omega_1 + \omega_2)/3$ ромбической решетки с углом при вершине $\pi/3$. Для решеток, близких к прямоугольным, максимальное значение J будет достигаться в центре параллелограмма периодов, т. е. в точке $(\omega_1 + \omega_2)/2$, но для ромбической решетки с углом при вершине $\pi/3$ точка максимума оказывается смещенной из центра и будет находиться в точке $(\omega_1 + \omega_2)/3$.



Для *квадратной решетки* при равных дебитах $q_1 = q_2$ обеих скважин и размещении второй скважины в критической точке $(\omega_1 + \omega_2)/2$ линии тока изображены на рис. 5.1. Коэффициент формы контуров питания, вычисленный по формуле (4.12), оказывается равным $C_A = 30,881$. Там же изображены линии тока для *ромбической решетки* при равных дебитах обеих скважин и размещении второй скважины в критической точке $(\omega_1 + \omega_2)/3$. Из рис. 5.1 видно, что контур питания каждой из скважин в ромбической решетке принимает форму равностороннего треугольника, а коэффициент формы контура питания становится равным $C_A = 27,321$.

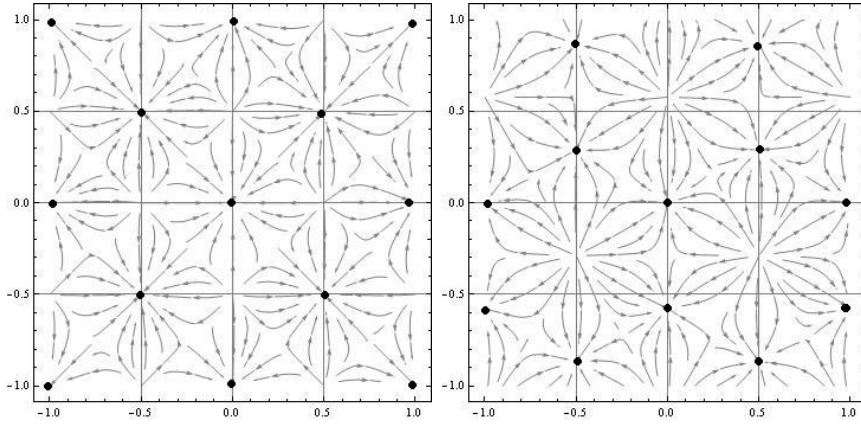


Рис. 5.1. Характер течения в квадратной и ромбической решетках при $z_1 = 0$ и $(\omega_1 + \omega_2)/2$.

5.2. Трехскважинный кластер. В случае трех скважин, размещенных произвольным образом в двоякопериодической решетке L , соотношения для безразмерных коэффициентов продуктивностей J_1 , J_2 и J_3 каждой из скважин и коэффициента J продуктивности трехскважинной системы можно записать в виде

$$\frac{1}{J_1} = \frac{1}{J_0} + s_{21} \ln \frac{R}{R_{12}} + s_{31} \ln \frac{R}{R_{13}}, \quad (5.4)$$

$$\frac{1}{J_2} = \frac{1}{J_0} + s_{12} \ln \frac{R}{R_{21}} + s_{32} \ln \frac{R}{R_{23}} \quad (5.5)$$

$$\frac{1}{J_3} = \frac{1}{J_0} + s_{13} \ln \frac{R}{R_{31}} + s_{23} \ln \frac{R}{R_{32}}, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} = \frac{1}{J_0} + \frac{q_1 + q_2}{q_1 + q_2 + q_3} \ln \frac{R}{R_{12}} \\ + \frac{q_1 + q_3}{q_1 + q_2 + q_3} \ln \frac{R}{R_{13}} + \frac{q_2 + q_3}{q_1 + q_2 + q_3} \ln \frac{R}{R_{23}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из соотношения (5.7) видно, что, в отличие от двухскважинной системы, величина J зависит как от относительного расположения скважин в решетке (величины R_{12}, R_{13} и R_{23}), так и от величины дебита каждой из скважин q_1, q_2 и q_3 . Можно показать, что величина J будет максимальна при равных значениях дебитов q_1, q_2 и q_3 и принимать значение

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_0} + \frac{2}{3} \ln \frac{R^3}{R_{12}R_{13}R_{23}}. \quad (5.8)$$

Значения коэффициентов формы $C_A^{(1)}, C_A^{(2)}$ и $C_A^{(3)}$ каждой из скважин в этом случае будут определяться следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{C_A^{(1)}}{C_A} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma C_A R_{12} R_{13}}{4\Delta} \right)^2, \\ \frac{C_A^{(2)}}{C_A} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma C_A R_{12} R_{23}}{4\Delta} \right)^2, \\ \frac{C_A^{(3)}}{C_A} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma C_A R_{13} R_{23}}{4\Delta} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из выражения (5.8) следует, что максимальное значение коэффициента продуктивности J будет достигаться, когда

$$\ln R_{12}R_{13}R_{23} = \ln R_{12} + \ln R_{13} + \ln R_{23} = \max. \quad (5.10)$$

Условие (5.10) при $z_1 = 0$ (первая скважина размещена в узле $z = 0$ параллелограмма периодов) будет выполняться, когда

$$\begin{aligned} \overline{V}(z_2, \bar{z}_2) - \overline{V}(z_3 - z_2, \overline{z_3 - z_2}) &= \bar{0}, \\ \overline{V}(z_3, \bar{z}_3) + \overline{V}(z_3 - z_2, \overline{z_3 - z_2}) &= \bar{0}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В отличие от двухскважинных систем, точки z_2 и z_3 , при которых достигается максимальное значение коэффициента продуктивности J , уже не будут точками полупериодов $\omega_1/2, \omega_2/2, (\omega_1 + \omega_2)/2$.

Условию (5.11) будут удовлетворять только три пары точек z_2 и z_3 , а именно, пара $(\omega_1/3, 2\omega_1/3)$, пара $(\omega_2/3, 2\omega_2/3)$ и пара $((\omega_1 + \omega_2)/3, 2(\omega_1 + \omega_2)/3)$. В этом случае величины R_{12}, R_{13} и R_{23} будут равными. Равными для каждой из трех скважин будут и коэффициенты формы $C_A^{(1)}, C_A^{(2)}$ и $C_A^{(3)}$, которые можно вычислить по формуле

$$\frac{C_A^{(1)}}{C_A} = \frac{C_A^{(2)}}{C_A} = \frac{C_A^{(3)}}{C_A} = \frac{1}{3} \left(\frac{\gamma C_A R_{12}^2}{4\Delta} \right)^2. \quad (5.12)$$

Для *квадратной решетки* при равных дебитах ($q_3 = q_2 = q_1$) и размещении второй и третьей скважины в точках экстремума величины J (вдоль диагонали в точках $(\omega_1 + \omega_2)/3$, $2(\omega_1 + \omega_2)/3$) линии тока изображены на рис. 5.2.

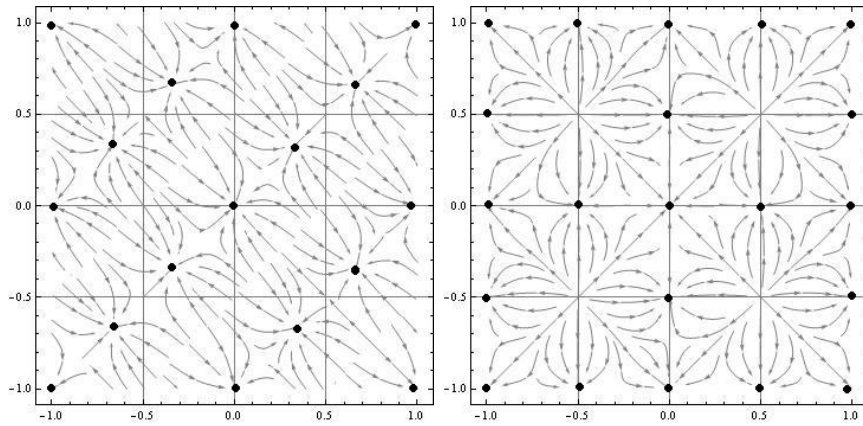


Рис. 5.2. Характер течения в квадратной решетке при $z_1 = 0$, $z_2 = (\omega_1 + \omega_2)/3$, $z_3 = 2(\omega_1 + \omega_2)/3$ и $z_2 = \omega_1/2$, $z_3 = \omega_2/2$

Для сравнения на рис. 5.2 изображен также характер течения для квадратной решетки, когда вторая и третья скважины находится в критических точках $\omega_1/2$ и $\omega_2/2$ данного параллелограмма периодов. Из рис. 5.2 видно, что размещение дополнительных скважин не в точках экстремума величины J , а в критических точках $\omega_1/2$ и $\omega_2/2$ параллелограмма периодов меняет характер течения. Поскольку значения R_{12} и R_{13} оказываются разными, следовательно, разными оказываются как контуры питания, так и их коэффициенты формы C_A .

В *ромбической решетке* с углом $\pi/3$ при одинаковых дебитах ($q_3 = q_2 = q_1$) и размещении второй и третьей скважины в точках экстремума величины J (вдоль диагонали в точках $(\omega_1 + \omega_2)/3$, $2(\omega_1 + \omega_2)/3$) линии тока и линии равных значений величины скорости течения изображены на рис. 5.3. Как видим, данное размещение скважин в ромбической решетке оптимально, так как сформированная новая решетка полностью эквивалентна исходной ромбической решетке с отношением диагоналей $1 : \sqrt{3}$, а все контуры питания одинаковы с максимальным значением коэффициента формы $C_A = 31,548$.

Характер течения для ромбической решетки, когда вторая и третья скважины находится в критических точках $\omega_1/2$ и $\omega_2/2$ данного параллелограмма периодов также представлен на рис. 5.3. Из рисунка видно, что для каждой скважины получается ромбический контур питания со значением коэффициента формы $C_A = 26,493$.

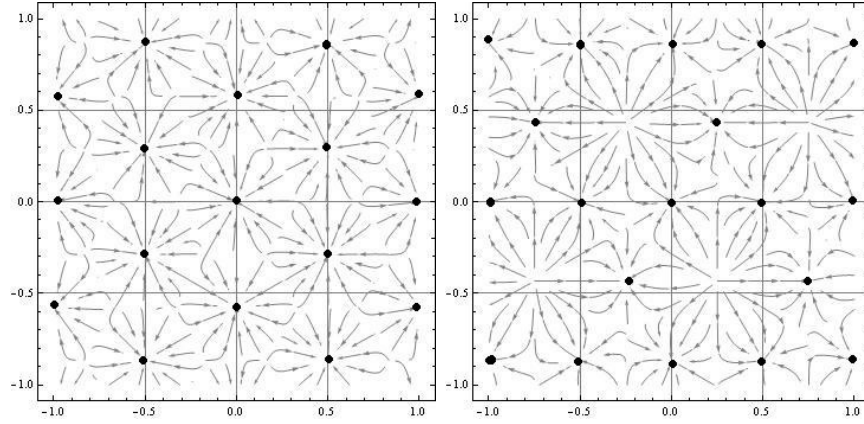


Рис. 5.3. Характер течения в ромбической решетке при $z_1=0$, $z_2=(\omega_1+\omega_2)/3$, $z_3=2(\omega_1+\omega_2)/3$ и $z_2=\omega_1/2$, $z_3=\omega_2/2$

§ 6. Замкнутый резервуар с прямоугольным контуром питания

Вышеизложенный подход к моделированию разработки месторождений с помощью эллиптических функций основан на априорном задании параллелограмма периодов и координат расположения добывающих скважин в нем. Контур питания каждой из скважин и всего кластера в целом при этом может не оказаться прямолинейным и будет меняться в зависимости от величины дебитов скважин и их расположений в кластере. Однако, двоякопериодические эллиптические функции Вейерштрасса могут быть использованы и при моделировании разработки месторождений с заранее заданным контуром питания в виде прямоугольника или прямоугольного треугольника. Методику построения функции давления и функции скорости в этом случае рассмотрим на примере резервуара с прямоугольным контуром питания.

Рассмотрим замкнутый прямоугольный резервуар размерами (x_e, y_e) и толщиной h , в котором размещено n добывающих скважин радиуса r_w с центрами в точках с координатами (рис. 6.1)

$$(x_{wj}, y_{wj}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Условие непроницаемости границы резервуара — это условие равенства нулю нормальной компоненты вектора скорости на границе, т. е. на горизонтальных границах ($y=0$ и $y=y_e$) прямоугольника $v_y=0$, а на вертикальных границах ($x=0$ и $x=x_e$) $v_x=0$. С помощью метода мнимых источников эти условия будут автоматически удовлетворены, если рассмотреть прямоугольную двоякопериодическую решетку с периодами $\omega_1=2x_e$ и $\omega_2=2iy_e$, в которой расположено четыре группы по n скважин с координатами

$$(x_{wj}, y_{wj}), \quad (x_{wj}, -y_{wj}), \quad (-x_{wj}, y_{wj}), \quad (-x_{wj}, -y_{wj}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

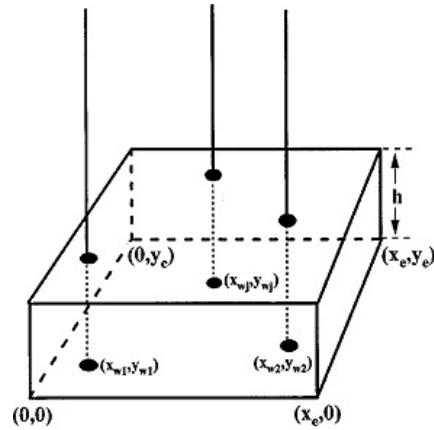


Рис. 6.1. Замкнутый прямоугольный резервуар с n добывающими скважинами. Следовательно, комплексно-сопряженная функция скорости $v_x(x, y) - i v_y(x, y)$ и функция давления $p(x, y)$ также могут быть записаны в виде (4.2) и (4.5), где суммирование будет производиться по всем $4n$ скважинам с учетом симметрии их расположения относительно осей координат. Для коэффициента продуктивности $J(x, y)$ резервуара в целом и коэффициентов формы $C_A^{(k)}$ каждой из скважин в резервуаре также можно воспользоваться формулами (4.8) и (4.12).

На рис. 6.2 представлены экспериментальные линии тока для замкнутого резервуара с квадратным контуром питания 2×2 и с двумя скважинами в нем, размещенными в точках $(0,5, 0,5)$ и $(0,5, 1,5)$, соответственно (данные из работы [20]). Отношение дебитов скважин $q_1/q_2 = 1/4,1$. Там же изображен характер течения, полученный по соотношениям (4.2). Как видим, наблюдается полное соответствие экспериментальных данных полученным по (4.2) линиям тока.

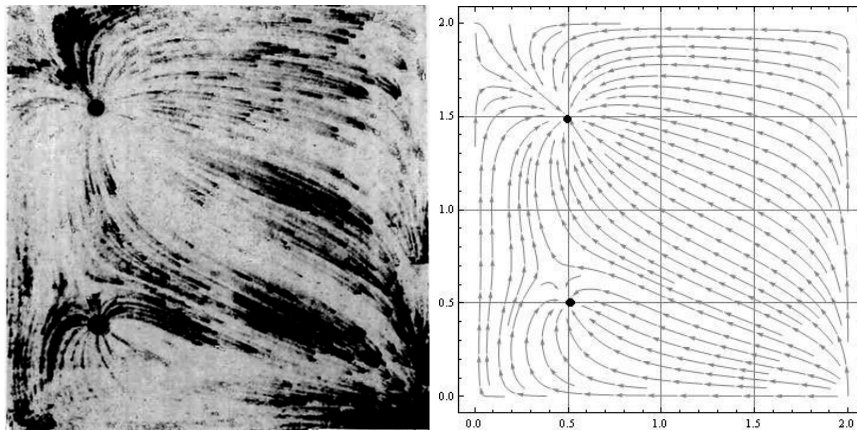


Рис. 6.2. Характер течения жидкости в квадрате 2×2 , полученный экспериментально в работе [20] и построенный по предлагаемой модели при $q_1 = 1$ и $q_2 = 4,1$

§ 7. Моделирование площадного заводнения с помощью двоякопериодической системы скважин

При вторичных методах разработки месторождений путем заводнения моделируемый пласт покрывается двоякопериодической системой добывающих и нагнетательных скважин. На рис. 7.1 изображены элементы наиболее распространенных систем площадного заводнения.

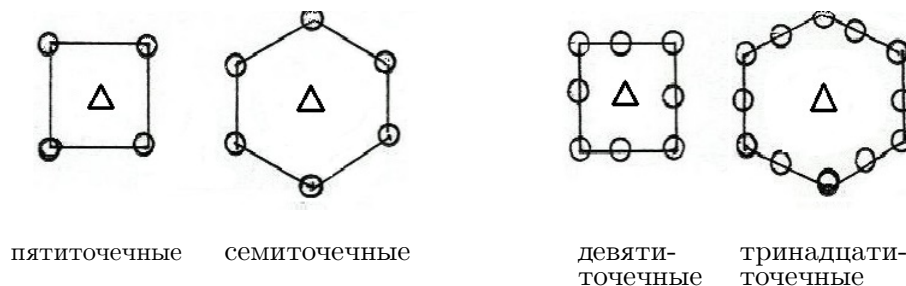


Рис. 7.1. Системы площадного заводнения. Добывающие скважины обозначены кружками, нагнетательные — треугольниками

В работе [10] приведены практически все существующие в настоящее время схемы заводнения.

Всю систему добывающих и нагнетательных скважин также можно описать с помощью двоякопериодической решетки L . При наличии в параллелограмме периодов как добывающих, так и нагнетательных скважин весь кластер из n скважин разбивается на сумму из n_1 добывающих скважин, для которых мощность скважин Q_k положительна, и n_2 нагнетательных скважин, для которых мощность скважин Q_k отрицательна.

Существуют различные модели заводнения. В модели «разноцветных жидкостей» физические свойства нефти и воды полагаются равными [21]. Более общая модель поршневого вытеснения [22] учитывает физические различия фильтрующихся фаз. Различия в плотности и вязкости вытесняемой и вытесняющей жидкостей обуславливают разрыв касательной компоненты v_t вектора скорости фильтрации на границе водонефтяного контакта (ВНК). При этом нормальная компонента v_n , а также величина давления p на границе ВНК остаются непрерывными. Совокупность перечисленных условий на границе ВНК можно описать следующей системой ((o) = oil, (w) = water) :

$$v_t^{(o)} \mu^{(o)} = v_t^{(w)} \mu^{(w)}; \quad v_n^{(o)} = v_n^{(w)}; \quad p^{(o)} = p^{(w)}. \quad (7.1)$$

Разрывную на границе ВНК, но двоякопериодическую в комплексной плоскости функцию $\bar{V}(z, \bar{z})$ будем искать в виде:

$$\bar{V}(z, \bar{z}) = \Phi(z, \bar{z}) + \frac{1}{2\pi i} \oint_L \zeta(\tau - z) \gamma(\tau) d\tau, \quad (7.2)$$

где $\Phi(z, \bar{z})$ определяется выражением (4.1), характеризующим распределение поля скоростей по «разноцветной» модели. Второе слагаемое в правой части формулы (7.2) представляет собой сингулярный интеграл с ядром типа Коши, заключенным в функции $\zeta(\tau - z)$.

Воспользуемся представлением (7.2) для нахождения неизвестной функции $\gamma(z)$ по значениям скорости для нефти $\bar{V}^{(o)}(z)$ и воды $\bar{V}^{(w)}(w)$. Задавая естественную параметризацию контура L , основанную на длине дуги s (см. рис. 7.1), и применяя к (7.2) формулы Сохоцкого–Племеля, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \bar{V}^{(w)}(z(s)) = \Phi(z(s)) \frac{1}{2\pi i} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z(s)) \gamma(z(\sigma)) \frac{dz}{d\sigma} d\sigma + \frac{\gamma(z(s))}{2}, \\ \bar{V}^{(o)}(z(s)) = \Phi(z(s)) \frac{1}{2\pi i} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z(s)) \gamma(z(\sigma)) \frac{dz}{d\sigma} d\sigma + \frac{\gamma(z(s))}{2}. \end{cases} \quad (7.3)$$

Из соотношений (7.3) для неизвестной функции $\gamma(s)$ получается следующее представление:

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \bar{V}^{(w)}(s) - \bar{V}^{(o)}(s) \\ &= \{ [V_t^{(w)}(s) - V_t^{(o)}(s)] + i [V_n^{(w)}(s) - V_n^{(o)}(s)] \} e^{-i\alpha}, \end{aligned}$$

где α — угол между касательной к линии L и осью X .

Обозначим отношение вязкостей через коэффициент мобильности $\kappa = \mu^{(w)}/\mu^{(o)}$, а касательную и нормальную компоненты вектора скорости, соответственно, как

$$T(s) = V_t^{(w)}(s) \quad \text{и} \quad N(s) = V_n^{(w)}(s).$$

Принимая во внимание условия на границе ВНК (7.1), получим:

$$\gamma(s) = V_t^{(w)}(s) (1 - \kappa) e^{i\alpha}. \quad (7.4)$$

В результате можно записать следующее интегральное представление функции комплексной скорости для воды, определяющее скорость продвижения границы ВНК:

$$\begin{aligned} \bar{V}^{(w)}(s) &= [V_t^{(w)}(s) + i V_n^{(w)}(s)] e^{-i\alpha} \\ &= \Phi(s) + \frac{1 - \kappa}{2\pi i} \oint_L [\zeta(z(\sigma) - z(s)) T(\sigma) e^{-i\alpha'}] \frac{dz}{d\sigma} d\sigma \\ &\quad + \frac{1 - \kappa}{2} T(s) e^{-i\alpha}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Известно, что угол α между касательной к линии L , проведенной через некоторую точку $z(s)$, и осью X связан с производной по параметру в этой точке соотношением

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{ds}.$$

Интегральное представление (7.5) в этом случае можно представить в виде следующего сингулярного интегрального уравнения для неизвестных функций $T(s)$ и $N(s)$:

$$\frac{1+\kappa}{2} T(s) + iN(s) = \left[\Phi(s) + \frac{1-\kappa}{2\pi i} \oint_L \zeta(z(\sigma) - z(s)) T(\sigma) d\sigma \right] \frac{dz}{ds}. \quad (7.6)$$

Таким образом, интегральное уравнение (7.6) для касательной и нормальной компонент вектора скорости воды $T(s)$ и $N(s)$ вдоль границы ВНК необходимо дополнить дифференциальным уравнением, определяющим эволюцию во времени этой границы. Данное уравнение можно записать в следующем виде:

$$m \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} = V(z(st)), \quad z(s, 0) = z_0 + r_w e^{i\theta}, \quad (7.7)$$

где z_0 — центр нагнетательной скважины радиуса r_w , $V(z(s, t))$ обозначает комплексную скорость перемещения точки z , расположенной которой на границе ВНК определяется текущим значением параметра s этой точки в момент времени t . Начальное условие в (7.7) указывает на начальное положение этой точки в момент начала заводнения, которое определяется соответствующим углом θ на контуре нагнетательной скважины. Фактически, по мере развития границы ВНК с течением времени параметр s становится функцией от θ и t .

Учитывая разрывность поля скоростей на границе ВНК, комплексно-сопряженная функция $\bar{V}(z(s, t))$ на границе ВНК определяется как полусумма значений скорости для нефти $\bar{V}^{(o)}(s, t)$ и воды

$$\begin{aligned} \bar{V}^{(w)}(s, t) - \bar{V}(s, t) &= \frac{1}{2} (\bar{V}^{(o)}(s, t) + \bar{V}^{(w)}(s, t)) \\ &= \left(\frac{1+\kappa}{2} T(s, t) + iN(s, t) \right) e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

С помощью данного представления уравнение (7.7) можно переписать в виде

$$m \frac{\partial \overline{z(s, t)}}{\partial t} = \left(\frac{1+\kappa}{2} T(s, t) + iN(s, t) \right) e^{-i\alpha}, \quad z(s, 0) = z_0 + r_w e^{i\theta}, \quad (7.8)$$

где функции $T(s, t)$ и $N(s, t)$ находятся из решения сингулярного интегрального уравнения (7.6).

Численное интегрирование дифференциального уравнения (7.8) при найденных функциях $T(s, t)$ и $N(s, t)$ может осуществляться по одной из таких стандартных схем, как схема Эйлера второго порядка точности или схема Рунге–Кутты четвертого порядка точности.

Известно [25], что отношение вязкостей κ оказывает негативное влияние на конечную нефтеотдачу: с уменьшением параметра κ и при сохранении прочих равных условий разработки наблюдается уменьшение объемов извлекаемых нефтяных запасов из-за растущей неустойчивости вытеснения нефти водой. Кроме того, при определенных значениях κ возникает неустойчивость Саффмана–Тейлора [26], которая часто называется «вязким пальцеобразованием» [27–29]. При значительном различии вязкостей нефти и воды (т. е. от отличии коэффициента мобильности κ от единицы) происходит нарушение устойчивости фронта заводнения, в результате чего нагнетаемая вода как бы «пронзает» нефтяную область острыми мысами (пальцами), оставляя за собой неосвоенные нефтяные запасы. Подобный эффект был также обнаружен и в ходе численных экспериментов [11], когда при определенных значениях параметра κ наблюдалось нарушение гладкости границы ВНК с последующим образованием «вязких пальцев». В качестве иллюстрации указанный эффект изображен на рис. 7.2 для случая пятиточечной схемы заводнения. Для большей наглядности рис. 7.2 дополнен экспериментальной картиной из работы [30] (Fig. 6 а в цитируемой работе).

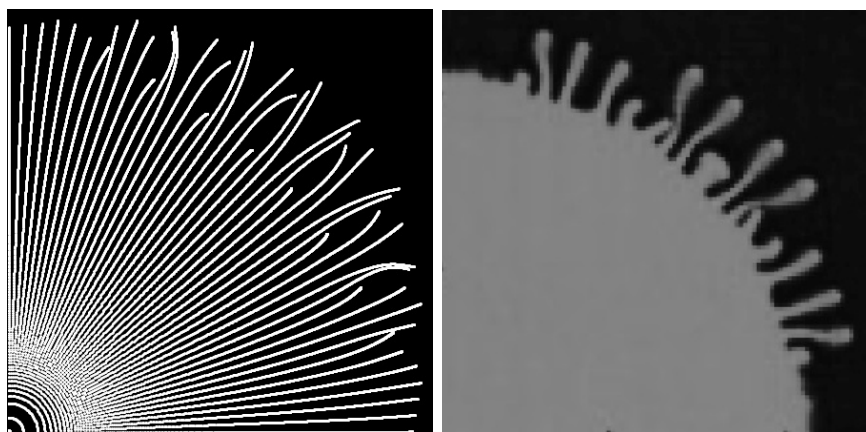


Рис. 7.2. Пример образования «вязких пальцев» для пятиточечной схемы заводнения. Слева — расчетные данные из работы [11]; справа — экспериментальные данные из работы [30]

Часть результатов численного эксперимента из монографии [11] представлена на рис. 7.3 для семиточечной и девятиточечной схем установки скважин в момент прорыва воды в добывающую скважину.

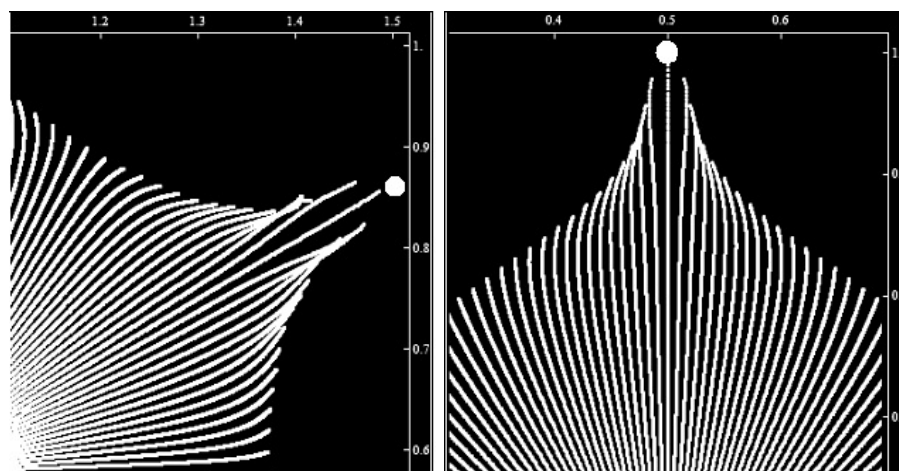


Рис. 7.3. Картины заводненной области для семиточечной и девятиточечной схем расстановки скважин.

Заключение

В работе представлен обзор результатов по моделированию разработки нефтяных месторождений с привлечением математического аппарата теории эллиптических функций Вейерштрасса. Полученные распределения поля скоростей фильтрации и поля давлений в двоякопериодических системах скважин позволили:

- определить контур питания каждой добывающей скважины в зависимости от вида двоякопериодической решетки размещения скважин,
- описать характер течения жидкости (линии тока) в контуре питания каждой скважины,
- найти распределение давления внутри каждого контура питания (а также и в пласте в целом),
- определить величину среднего давления внутри каждого контура питания и найти зависимость величины коэффициента продуктивности скважины от приведенного радиуса контура питания скважины,
- найти зависимость приведенного радиуса контура питания скважины от коэффициента формы скважины и вычислить этот коэффициент для произвольного контура питания.

При исследовании характера течения в многоскважинных кластерах было показано, что размещение дополнительных скважин в параллелограмме периодов, т. е. превращение двоякопериодических решеток добывающих скважин в двоякопериодические кластеры не приводит к улучшению формы контура питания каждой из скважин.

Так, квадратные или треугольные решетки размещения добывающих скважин после добавления дополнительных скважин могут стать прямоугольными или иметь криволинейную границу области питания с меньшим значением коэффициента формы C_A . В лучшем случае при оптимальном размещении дополнительных скважин в решетке они могут сохранить начальную оптимальную квадратную или гексагональную форму контура питания. Повышение коэффициента продуктивности всего кластера при этом может произойти только за счет сгущения сетки скважин (увеличения относительной плотности сетки скважин).

По результатам расчетов значений коэффициента формы C_A для различных видов контуров питания была составлена таблица. Было произведено сравнение результатов расчетов со значениями, представленными в работах других авторов и показали полное соответствие друг другу.

В задачах площадного заводнения двоякопериодическими кластерами добывающих и нагнетательных скважин визуальный анализ картин заводненной области показал качественное совпадение результатов настоящего исследования с данными других авторов, полученными как при численном моделировании, так и в рамках физического эксперимента. Результаты численного эксперимента подтверждают также сделанные ранее другими авторами выводы, об отрицательном влиянии высокой разницы в вязкостях воды и нефти на конечную нефтеотдачу. При численном эксперименте было выявлено, что с уменьшением значения коэффициента мобильности λ наблюдается сокращение «безводного» периода добычи, а также уменьшение площади, охватываемой заводнением, что негативно сказывается на объеме извлекаемых запасов нефти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций: С приложениями к механике. М.: МЦНМО, 2014, 368 с.
2. Григоров Э. И., Фильшинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970, 556 с.
3. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976, 444 с.
4. Мирсалимов В. М. Неоднородные упруго-пластические задачи. М.: Наука, 1987, 256 с.
5. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Иностранная литература, 1963, 247 с.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966, 448 с.
7. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005, 368 с.
8. Астафьев В. И., Ротерс П. В. Эллиптические функции в задачах моделирования разработки нефтяных месторождений. Самара: СамГУ, 2014, 162 с.
9. Фазлыев Р. Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2008, 256 с.

10. Астафьев В. И., Касаткин А. Е. Атлас схем заводнения. Самара: Изд-во СНЦ, 2016, 70 с.
11. Астафьев В. И., Касаткин А. Е. Математическое моделирование и численное решение задач с подвижной границей (на примере заводнения нефтяных месторождений). Самара: Изд-во СНЦ, 2016, 160 с.
12. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004, 640 с.
13. Газов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640 с.
14. Dietz D. N. Determination of average reservoir pressure from build-up surveys. — J. Petrol. Technol., 1965, v. 17, № 8, p. 955–959.
15. Peaceman D. W. Recalculation of Dietz shape factor for rectangles. — Unsolicited Paper SPE 21256, 1990.
16. Umnuayponwivat S., Ozkan E. Evaluation of inflow performance of multiple horizontal wells in closed systems. — Trans. ASME. J. Energy Res. Technol., 2000, v. 122, March, p. 8–13.
17. Valko P. P., Doublet L. E., Blasingame T. A. Development and application of the multiwell productivity index (MPI). Soc. Petroleum Eng. J., 2000, v. 5, № 1, P. 21–31.
18. Matthews C. S. Studies on Pressure Distribution in Bounded Reservoirs at Steady State. / C.S. Matthews, H.C. Lefcovits. — Petroleum Trans., AIME, 1955, v. 204, p. 182–189.
19. Герольд С. П. Аналитические основы добычи нефти, газа и воды из скважин. М.-Л.: Нефтеиздат, 1932.
20. Уиллхайт Г. П. Заводнение пластов. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009, 788 с.
21. Крэйг Ф. Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении. М.: Недра, 1974, 192 с.
22. Saffman P. G. Viscous fingering in hele-shaw cells. — J. Fluid Mech, 1986, v. 173, p. 73–84.
23. Stone H. A. Philip Saffman and viscous flow theory. — J. Fluid Mech., 2000, v. 409, p. 165–183.
24. Заславский М. Ю., Пергамент А. Х. Исследование неустойчивости типа «fingers» в фильтрационных течениях. Препринт. М.: ИПМ им. Келдыша РАН, 2002, № 31.
25. Dapira P., Glimm J., Lindquist B., McBryan O. Polymer floods: a case study of nonlinear wave analysis and of instability control in tertiary oil recovery. — SIAM J. Appl. Math., 1988, v. 48, p. 353–373.

Поступила в редакцию
18.X.2019

**XX ВСЕРОССИЙСКИЙ СИМПОЗИУМ
ПО ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ
МАТЕМАТИКЕ**
(осенняя открытая сессия, 22 сентября — 6 октября 2019 г.)

Научные доклады

В. О. Бегишев, И. А. Гудкова (Москва, РУДН, ФИЦ ИУ РАН).
Анализ модели обслуживания абонентов NB-IoT в сетях 5G.

Рассматривается модель соты сети LTE, на которую поступают запросы на установление соединения от абонентов типа H2H и межмашинных сессий NB-IoT. Предполагается, что для обслуживания NB-IoT радиоресурсы сети LTE выделяются последовательно диапазонами фиксированного размера.

Для рассматриваемой модели проведен математический анализ оценки таких важных показателей качества обслуживания, как вероятности потери сессий H2H и NB-IoT, задержка передачи блоков данных.

Представленный сценарий поступления двух видов трафика позволяет определить диапазоны нагрузок, при которых выполняются заданные параметры качества обслуживания в сетях сотовой связи 5G.

В работе, представленной данным сообщением, исследуется стратегия динамического распределения радиоресурсов соты сети LTE между трафиком NB-IoT (NarrowBand IoT) и абонентов H2H (Human-to-Human), для каждой из которых зарезервированы минимальные ресурсы.

Пользователям предоставляется одна H2H-услуга, например, потоковое видео, и сеть поддерживает передачу блоков данных одного типа от NB-IoT.

Пусть C — общее количество радиоканалов в одной соте сети LTE. Для предоставления услуги H2H и NB-IoT зарезервировано R_H и R_N радиоканалов соответственно. Тогда $C_H = C - R_N$ есть число каналов, доступных для H2H, а $C_N = C - R_H$ — для NB-IoT.

Для передачи блока данных от NB-IoT требуется b радиоканалов. При этом для передачи текущего числа блоков данных радиоресурсы выделяются диапазонами фиксированного размера по c каналов.

Предположим, что входящий поток от NB-IoT является пуассоновским с интенсивностью λ [с⁻¹], а длина блока распределена по экспоненциальному закону со средним θ [бит]. Следовательно, для интенсивности ρ предложенной нагрузки на передачу блоков данных от NB-IoT, имеем выражение $\rho = \lambda \theta$.

Для предоставления H2H-услуги требуется d радиоканалов.

Предполагается, что входящий поток запросов H2H — также пуассоновский с интенсивностью ν [с⁻¹], а время предоставления H2H-услуги распределено по экспоненциальному закону со средним $1/\mu$ [с] (ср. [3]), тогда для интенсивности a предложенной нагрузки от H2H имеем:

$$a = \frac{\nu}{\mu}.$$

Обозначим $m(t)$ число передаваемых в момент $t \geq 0$ блоков данных от NB-IoT, а $n(t)$ — число абонентов, которым в момент $t \geq 0$ предоставляется H2H-услуга.

Тогда функционирование рассматриваемой модели соты сети LTE с трафиком NB-IoT описывает составной случайный процесс $\{(m(t), n(t)); t > 0\}$ (см. рис. 1).

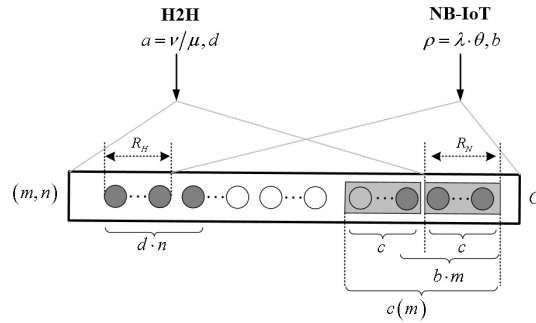


Рис. 1. Модель системы NB-IoT

Для расчета вероятностей B_N блокировок NB-IoT получено следующее выражение:

$$B_N = p(SM, 0) + \sum_{s=1}^S \sum_{n=N_1}^{N_2} p(sM, n),$$

где

$$S = \left\lfloor \frac{C - R_H}{c} \right\rfloor, \quad N_1 = \left\lfloor \frac{C - (s+1)c}{d} \right\rfloor, \quad N_2 = \left\lfloor \frac{C - sc}{d} \right\rfloor.$$

Численные результаты приведены на рис. 2.

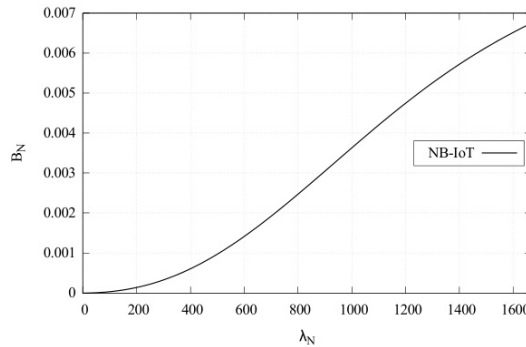


Рис. 2. Вероятность блокировок NB-IoT

Отметим, что NB-IoT может обеспечить надежную передачу данных (вероятность потери сообщений менее $7 \cdot 10^{-3}$) для 100 000 NB-IoT устройств при постоянной интенсивности $\nu = 1,6$ [с] поступления H2H.

Таким образом, разработана аналитическая модель оценки эффективности резервирования ресурсов. Модель позволяет анализировать особенности совместного использования ресурсов LTE и NB-IoT на примере оператора наблюдения, реализующего систему мониторинга. Предложенная модель может быть использована компаниями, специализирующимся на предоставлении телекоммуникационных услуг, для определения оптимальных нагрузочных параметров для качественного обслуживания межмашинных сессий NB-IoT.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 18-37-00380 и 18-00-01555 (18-00-01685).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 3GPP, Cellular system support for ultra-low complexity and low throughput Internet of Things (CIoT), 3rd Generation Partnership Project (3GPP 45.820). Release 13. Technical Report. Sophia-Antipolis: 3GPP Organizational Partners, December 2015. https://www.3gpp.org/ftp/Specs/archive/45_series/45.820/
2. 3GPP, Standardization of NB-IoT completed. Sophia-Antipolis: 3GPP Organizational Partners, June 2016. <https://www.3gpp.org/news-events/1785-nb-iot-complete;> https://www.3gpp.org/images/PDF/R13_IO_rev3.pdf
3. Cardone G., Corradi A., Foschini L., Ianniello R. ParticipAct: A large-scale crowdsensing platform. — IEEE Trans. Emerging Topics in Comput., 2016, v. 4, is. 1, p. 21–32.
4. Margelis G., Piechocki R., Kaleshi D., Thomas P. Low throughput networks for the IoT: Lessons learned from industrial implementations. In: 2015 IEEE 2nd World Forum on Internet of Things (WF-IoT) (Milan, December 14–16, 2015). Proceedings. / Ed. by L. Ladid, N. Aschenbruck, V. Piuri. Piscataway, NJ: IEEE, 2015, p. 181–186.

УДК 004.77+621.37

V. O. Begishev, I. A. Gudkova (Moscow, RUDN Univ., FRC CSC RAS)
Analysis of the model of NB-IoT customer service systems in 5G networks

Abstract: An analytical model for evaluation of the effectiveness of resource reservation is developed. Based on the example of the observation operator, implementing the monitoring system, the model allows to analyze features of resource sharing between LTE networks and NB-IoT systems.

Keywords: exponential distribution, information transmission, Internet of things, IoT, LTE, narrow-band IoT, Poisson flow, queueing systems, 5G cellular systems

В. А. Бесчастный¹, В. С. Скрипкин¹, Ю. В. Гайдамака^{1,2} (¹ Москва, РУДН, ² Москва, ФИЦ ИУ РАН). **Вероятностная модель для анализа разделения устройств беспроводной сети на подгруппы мультивещания.**

В работе предлагается метод анализа показателей эффективности беспроводной сети с многоадресной передачей данных подгруппам подвижных пользователей с помощью замкнутой сети массового обслуживания (СеМО) [1]. Зная стационарное распределение вероятностей рассматриваемой системы, можно сделать вывод об эффективности того или иного алгоритма разделения пользователей на подгруппы мультивещания [2]. Выделение подгрупп мультивещания может значительно повысить спектральную эффективность сети, позволяя «отцеплять» пользователей с плохим качеством канала, от пользователей с хорошим. За счет такого механизма, пользователи с лучшим качеством канала при том же количестве выделенных радиоресурсов будут иметь более высокую скорость передачи данных, а, значит, общая пропускная способность сети увеличится. Однако пользователи с относительно плохим качеством канала будут испытывать еще более низкие показатели качества обслуживания, что может негативно отразиться на справедливости распределения ресурсов [3].

Узлы рассматриваемой СеМО, общее число которых равно S , соответствуют индексам качества канала (англ. Channel Quality Index, CQI), при этом так называемый нулевой узел моделирует состояние устройства, при котором оно не осуществляет обмен данными, т.е. находится в режиме ожидания. Обозначим θ_{ss-1} вероятность наступления события, при котором пользователь отдаляется от базовой станции (БС) и меняет индекс CQI с s на $s-1$; тогда $\theta_{ss+1} = 1 - \theta_{ss-1}$ — вероятность события, при котором пользователь приближается к БС и меняет CQI с s на $s+1$; а a_s — среднее время, когда пользователь не перемещается из области s , т.е. он не меняет свой уровень CQI. Значения α_s , β_s и a_s предполагаются известными, и могут быть получены из данных имитационного моделирования. На каждом узле есть M приборов, что определяет максимальное число пользовательских устройств (англ. User Equipment, UE) с одним и тем же значением CQI.

Для данной системы стационарные вероятности $p(\mathbf{m})$ состояний системы рассчитываются по формуле

$$p(\mathbf{m}) = \frac{1}{G(S, M)} \prod_{s=1}^S \frac{(h_s a_s)^{m_s}}{m_s!},$$

где нормировочная константа может быть найдена из

$$G(M, N) = \sum_{n \in X(M, N)} \prod_{m=1}^M \frac{(h_m a_m)^n m}{n_m!},$$

с пространством состояний

$$|X(M, N)| = X := \binom{M+N-1}{M-1}, \quad M \geq 0, \quad N \geq 0,$$

а $h_m, m \in M$, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} h_1 = h_2 \theta_{21} + h_0 \theta_{01}, \\ h_m = h_{m-1} \theta_{m-1} + h_{m+1} \theta_{m+1} + h_0 \theta_{0m}, \quad 2 \leq m \leq M-1, \\ h_M = h_{M-1} \theta_{M-1, M} + h_0 \theta_{0M}. \end{cases}$$

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18-07-00156 и № 18-37-00380.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башарин Г. П. Лекции по математической теории телетрафика. М.: РУДН, 2009, 342 с.
2. Ostrikova D., Rinaldi F., Beschastnyi V., Gudkova I., Militano L., Araniti G., Iera A., Samouylov K. Analytical Model for Multicast Subgrouping in 5G-Mobile eMBMS Environment. 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), 2017, p. 13–19.
3. Beschastnyi V., Polovov M., Ostrikova D., Gudkova I., Araniti G., Shorgin S. Analytical Model for Performance Analysis of Video Flow Transmission to Multicast Subgroups in 5G Wireless Networks. AIP Conference Proceedings 2116, 090004, 2019, p. 1–5.

С. В. Гарбарь (Великий Новгород, НовГУ). **Моделирование последовательностей с распределением Лапласа с использованием алгоритмов авторегрессии.**

Рассмотрим задачу моделирования стационарных последовательностей случайных величин с заданным значением коэффициента корреляции между соседними членами (т.е. заданным $R(1)$ — значением автокорреляционной функции в точке 1).

Модель авторегрессии первого порядка $AR(1)$ задается уравнением

$$Y(t) = aY(t-1) + bX(t) \quad \text{при} \quad a, b \geq 0, \quad a + b = 1,$$

предполагает преобразование белого шума $\{X(t)\}$ в последовательность $\{Y(t)\}$ с корреляционной функцией вида $R(\tau) = a^{|\tau|}$. Значение в момент времени t формируется как комбинация значения в момент $(t-1)$ и независимой случайной составляющей $X(t)$. Полученная последовательность стационарна в широком смысле.

Задачей данной работы является нахождение вида плотности распределения $f(x)$ такой прибавляемой случайной величины $X(t)$, чтобы каждый член полученной последовательности имел распределение Лапласа, которое находит свое применение в экономике, финансах, при обработке сигналов, в моделировании биологических процессов. Оно имеет функцию плотности

$$g(y) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|y-\beta|},$$

характеристическую функцию

$$\psi(t) = \frac{\alpha^2 e^{it\beta}}{\alpha^2 + t^2},$$

где $\alpha > 0$ — параметр масштаба, $\beta \in (-\infty; \infty)$ — параметр сдвига.

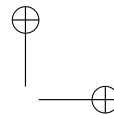
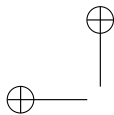
В работе [1] рассмотрено решение данной задачи на примерах нормального, экспоненциального, равномерного распределений, а также распределения Эрланга. Для нахождения вида прибавляемой случайной величины необходимо решить интегральное уравнение относительно функции плотности членов последовательности. Решение может быть записано в виде

$$f(x) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itbx} \frac{\psi(t)}{\psi(at)} dt.$$

Для распределения Лапласа имеем

$$f(x) = a^2 \cdot \delta(x - \beta) + (1 - a^2) \cdot \frac{\alpha b}{2} e^{-\alpha b|x-\beta|}$$

Случайная величина с данной функцией плотности может быть рассмотрена как смесь случайной величины с распределением Лапласа с параметром масштаба αb и сдвигом β и величины с вырожденным распределением в точке β . Смеси могут быть смоделированы при помощи метода суперпозиции.



Так как $g(y)$ является симметричной относительно точки β , то верно, что $2\beta - Y(t)$ также будет иметь распределение Лапласа параметрами α, β , однако коэффициент корреляции между соседними членами $R(1)$ поменяет знак на противоположный. Данный факт позволяет моделировать случайные последовательности с отрицательным $R(1)$.

Таким образом, основанный на модели авторегрессии первого порядка алгоритм может быть использован для моделирования последовательностей с распределением Лапласа и коэффициентом корреляции между соседними членами из отрезка $[-1; 1]$. Описанный метод прост в применении.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и ГФЕН Китая в рамках научного проекта № 19-51-53003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garbar S. Using AR(1) model to simulate strictly stationary random sequences. — 2018 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 441 012018.

М. Б. Гончаренко (Москва, ВМК МГУ). **О связи двух представлений сигнала с шумом в виде конечной нормальной смеси в форме стохастического дифференциального уравнения.**

При анализе данных, порожденных сложными системами, крайне важно использовать наиболее реалистичную модель шума. Далеко не всегда распределение шума заранее известно, а подчас сам вид распределения может изменяться со временем, отражая сложную динамику происходящих процессов. Такое поведение присуще как волатильности биржевых котировок, так и данным физиологических показателей человека во время выполнения эксперимента (см. [1]). Аппарат конечных нормальных смесей дает возможность построить гибкую модель шума в столь сложных сигналах.

В данной работе рассмотрено два представления случайных процессов с шумом в виде конечной нормальной смеси в форме стохастического дифференциального уравнения. Первая модель предполагает мгновенные переключения компонент в процессе Ито

$$dX_t = \mu(t, \omega) dt + \sigma(t, \omega) dW_t,$$

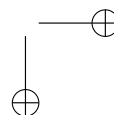
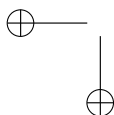
где

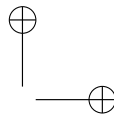
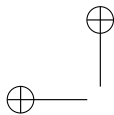
$$(\mu(t, \omega), \sigma(t, \omega)) = \begin{cases} (\mu_1(t), \sigma_1(t)) & \text{с вероятностью } \alpha_1 \\ \vdots \\ (\mu_m(t), \sigma_m(t)) & \text{с вероятностью } \alpha_m. \end{cases} \quad (1)$$

В обоих случаях случайный процесс $\{X_t\}$ имеет распределение в виде конечной нормальной смеси, т. е. имеет плотность

$$p(t, x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \frac{1}{\sigma_i(t)} \varphi\left(\frac{x - \mu_i(t)}{\sigma_i(t)}\right),$$

где $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \geq 0$ — веса компонент, удовлетворяющие условию $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$.





В работе [2] рассматривается другой подход к конструированию СДУ случайного процесса с конечномерными распределениями в виде смеси, которое имеет вид

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t. \quad (2)$$

При этом коэффициента сноса и диффузии имеют следующие выражения

$$\mu(t, x) = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i \mu_i(t, x) p_i(t, x)}{\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i(t, x)},$$
$$\sigma(t, x) = \frac{\sum_{i=1}^m \alpha_i \sigma_i^2(t, x) p_i(t, x)}{\sum_{i=1}^m \alpha_i p_i(t, x)}.$$

Можно показать, что представление (2) является марковской проекцией (1). Данный факт позволяет исследовать взаимозаменяемость моделей (1) и (2) в самых разнообразных приложениях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-07-00252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

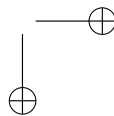
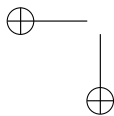
1. Гончаренко М. Б. Оценка формы отклика в сигналах магнитоэнцефалограмм с шумом в виде конечной нормальной смеси. — Системы и средства информатики, 2918, т. 28, в. 3, с. 72–85.
2. Алекритский Д. И. Стохастические дифференциальные уравнения для случайных процессов со смешанными гауссовскими распределениями. — Вестник Пермского университета, 2013, т. 25, в. 2, с. 73–90.

С. С. Горячев (Москва, ВМК МГУ). **О решении задачи выделения признаков в сильно зашумленных сигналах ЭЭГ с применением самоорганизующихся карт Кохонена.**

Введение. В работе рассматривается один из возможных подходов к решению задачи выделения признаков в сильно зашумленных продолжительных ЭЭГ-сигналах. Непосредственному решению задачи предшествует процесс очистки сигнала от артефактов на основе анализа независимых компонент [1].

Постановка задачи. Первым этапом решения задачи выделения признаков из сигнала X является его разбиение на сегменты Y_i . Далее, каждому сегменту сопоставляется вектор y_i описывающих его признаков. Наконец, в пространстве этих признаков вводится метрика ρ и для полученных сегментов решается задача кластеризации, т. е. отнесение каждого сегмента Y_i к одному из кластеров Z_k так, чтобы выполнялось условие:

$$\forall Y_i, Y_j \in Z_k, Y_l \notin Z_k \quad \rho(y_i, y_j) < \rho(y_i, y_l) \quad \rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty).$$



Самоорганизующиеся карты Кохонена. Перед началом работы алгоритма [2] задается множество кластеров Ω из q элементов. Каждому из них сопоставляется вес $w \in \mathbb{R}^n$ и координата $r \in \mathbb{R}^m$ на дискретной сетке.

1. На каждом шаге t алгоритма для входного вектора $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ выбирается «кластер-победитель» по следующему правилу:

$$v(t) = \arg \min_{k \in \Omega} \|x(t) - w_k(t)\|.$$

2. Осуществляется обновление весов соразмерно близости соответствующих им кластеров к «победителю»:

$$\Delta w_k(t) = \alpha(t) \eta(v, k, t) [x(t) - w_k(t)],$$

где $\eta(v, k, t)$ — «функция окрестности», $\alpha(t)$ — величина шага алгоритма.

Итоги. По результатам обзора подходов к очистке ЭЭГ от артефактов проведен и подробно описан процесс их удаления, получен очищенный сигнал. Для него решена задача выделения признаков с применением самоорганизующихся карт Кохонена. На двумерной сетке визуализированы упорядоченные в смысле близости друг к другу в пространстве признаков кластеры, формирующие группы ЭЭГ-ритмов общепринятой классификации. Визуализация выполняет роль краткой сводки по сигналу ЭЭГ, отражающей аномальные значения интересующих исследователя типов волн или ритмов мозговой активности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gramfort A., Luessi M., Larson E., Engemann D.A., Strohmeier D., Brodbeck C., Goj R., Jas M., Brooks T., Parkkonen L., Hamalainen M. MEG and EEG data analysis with MNE-Python. — *Frontiers in Neuroscience*, 2013, v. 7, is. 1, p. 267.
2. Kohonen T. Self-organized formation of topologically correct feature maps. — *Biological Cybernetics*, 1982, v. 43, is. 1, p. 59.

М. А. Драницына (Москва, ВМК МГУ). **Алгоритм восполнения недостающих данных для однородных сигналов.**

Возникновение недостающих данных в целом характерно для биологических и клинических исследований. Недостающие данные являются потенциальным источником систематических ошибок в клинических исследованиях, а также оказывают влияние на регуляторные решения по результатам таких исследований (см. [1]). В исследованиях с целью доказательства эквивалентности подходы к обработке недостающих данных зачастую приводят к возникновению смещений и некорректным выводам (см. [2]). В частности, при анализе фармакокинетических кривых, которые отражают зависимость концентрации соединения в биологических матрицах человека или животного после его введения в разных формуляциях от времени, в качестве замены пропущенного значения концентрации используют 0 или $\frac{\text{НПКО}}{2}$ (НПКО — нижний предел количественного определения) даже в тех случаях, когда в следующей временной точке значение концентрации ненулевое.

Предположим, что сигнал однороден в некоторой группе, состоящей из N наблюдений (например, субъектов в исследовании или эпох записи сигнала), где объем выборки N — небольшое число. Пусть поведение сигнала можно описать параболой. Введем обозначение $y_{n,k}$ — измеряемое с некоторой нормально распределенной ошибкой значение сигнала (например, концентрации) для n -го субъекта в k -й временной точке, $n = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, K}$. Тогда можно записать $y_{n,k} = C_n x_{n,k}^2$, где нам известен только вид зависимости, а C_n — индивидуальная для каждого n характеристика наблюдений.

Пусть отсутствует некоторое значение

$$y_{m,l} > 0, \quad m = \overline{1, N}, \quad l = \overline{2, K-1},$$

т.е. пропущено значение для некоторого наблюдения из группы в некоторой временной точке измерения сигнала, при этом эта временная точка не является ни первой, ни последней точкой наблюдения. Кроме того, пусть значения $y_{m,l-1}$ и $y_{m,l+1}$ наблюдаются и больше 0. Тогда, для каждого наблюдения из N , за исключением m , определим степень влияния d_n значения в точке $y_{n,k-1}$ на значение $y_{n,k}$ следующим образом:

$$d_1 = \sqrt{\frac{y_{1,k}}{y_{1,k-1}}} = \frac{x_{1,k}}{x_{1,k-1}}, \quad \dots, \quad d_{l-1} = \frac{x_{l-1,k}}{x_{l-1,k-1}},$$

$$d_{l+1} = \frac{x_{l+1,k}}{x_{l+1,k-1}}, \quad \dots, \quad d_N = \frac{x_{N,k}}{x_{N,k-1}}.$$

Далее вычислим среднюю степень влияния

$$\bar{d} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1, n \neq l}^N \frac{x_{n,k}}{x_{n,k-1}}.$$

Используем полученное усредненное значение для вычисления

$$y_{m,l} = C_m x_{m,l}^2 = C_m (\bar{d} x_{m,l-1})^2 = \bar{d}^2 y_{m,l-1}.$$

В дальнейшем планируется обобщение и изучение свойств более сложных моделей, в частности, с использованием сегментирования сигнала для более гибкого определения временных интервалов с преобладанием сходных подлежащих процессов, формирующих сигнал (см. [3]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-07-00252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *EMA Committee for Medicinal Products for Human Use (CHMP) Guideline on Missing Data in Confirmatory Clinical Trials*, EMA/CPMP/EWP/1776/99 Rev. 1.
2. *Rabe B. A., Day S., Fiero M. H., Bell M. L.* Missing data handling in non-inferiority and equivalence trials: A systematic review. — *Pharmaceutical Statist.*, 2018, v. 17, is. 5, p. 77–488.
3. *Dranitsyna M. A., Zakharova T. V.* Investigation of the window variance noise component of multicomponent signals. — *J. Math. Sci.*, 2019, v. 237, is. 5, p. 639–645.

М. А. Драницына, Т. В. Захарова (Москва, ВМК МГУ). **Свойства процедуры двух односторонних t -тестов в рамках модели с недостающими данными.**

Недостающие данные могут приводить к систематическим ошибкам в клинических исследованиях (см. [1]). Возникновение и объем недостающих данных зависит от множества причин, в том числе от длительности эксперимента, таким образом, запись биологических и медицинских сигналов подвержена возникновению недостающих данных. Примером такого сигнала является фармакокинетическая кривая, отражающая зависимость концентрации некоторого соединения в цельной крови, сыворотке или плазме человека или животного после его введения в разных формуляциях от времени. В исследованиях фармакокинетики обычно получают такие записи для разных формуляций у одного и того же субъекта. Для сравнения таких сигналов (то есть формуляций) используют метрики на основе наблюдаемых данных (например площади под такой кривой, оцененную методом трапеций), для чего используют процедуру двух односторонних тестов Шуирмана (см. подробнее [2]). Гипотезу H_0 и альтернативу H_A согласно исследовательскому предположению об эквивалентности метрик, характеризующих такой сигнал, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} H_0 : \mu_1 - \mu_2 &\leq \delta_{\min} \text{ или } \mu_1 - \mu_2 \geq \delta_{\max} \\ H_A : \delta_{\min} &< \mu_1 - \mu_2 < \delta_{\max}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$ — заданные пределы признания эквивалентности, а μ_1 и μ_2 — математические ожидания метрик сравниваемых формуляций (сигналов 1 и 2).

Для проверки гипотез используют два односторонних t -теста:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - \delta_{\min}}{\hat{\sigma}_d \sqrt{2/n}} > t(\alpha, 2n - 2) \\ t_2 &= \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 - \delta_{\max}}{\sigma_d \sqrt{2/n}} < -t(\alpha, 2n - 2), \end{aligned} \quad (2)$$

где n — число записей сигналов 1 и 2 ($n_1 = n_2$), $t(\alpha, 2n - 2)$ — квантиль центрального t -распределения с $2n - 2$ степенями свободы, $\hat{\sigma}_d$ — обобщенная выборочная дисперсия разностей между записями сигналов 1 и 2 у субъектов.

Ранее было показано, что при использовании процедуры двух односторонних тестов величина ошибки I рода не превышает заданный уровень α . Предположим, что для сигнала 1 наблюдаются недостающие данные. Пусть q — уровень полноты данных, то есть доля данных, оставшаяся от изначальных данных, $0 < q \leq 1$, ($1 - q$ — доля пропущенных данных в выборке), тогда $\tilde{Y}_1 = \bar{Y}_1 + \ln(q)$ — выборочное среднее метрик для сигнала 1 при условии недостающих данных. Можно показать, что в рамках такой модели при использовании той же процедуры проверки гипотез величина ошибки I рода может превышать значение α (см. [3]).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-07-00252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *EMA Committee for Medicinal Products for Human Use (CHMP) Guideline on Missing Data in Confirmatory Clinical Trials*, EMA/CPMP/EWP/1776/99 Rev. 1.
2. Драницына М. А., Захарова Т. В., Ниязов Р. Р. Свойства процедуры двух односторонних тестов для признания биоэквивалентности лекарственных препаратов. — Ремедиум. Журнал о рынке лекарств и медицинской технике, 2019, в. 3, с. 40–47.
3. Захарова Т. В., Тархов А. А. Оценка уровня значимости критерия Шуирманна для проверки гипотезы биоэквивалентности при наличии пропущенных данных. — Информатика и ее применения, 2019 (в печати).

**Д.В.Иванова, Е.В.Маркова, И.А.Гудкова (Москва, РУДН).
Пример функционирования беспроводной сети LTE с системой LSA.**

В связи с развитием телекоммуникационных беспроводных сетей последующих поколений, в частности сетей на базе технологии LTE, повышается спрос на высокоскоростные услуги, а также увеличивается число пользователей мобильных сетей, что приводит к экспоненциальному росту объема передаваемого в мобильных сетях трафика. По данным компании Cisco Systems [1] объем трафика, генерируемого в мобильных сетях, к 2021 году составит 48,3 экзабайт в месяц. В то же время повышаются требования к уровню качества обслуживания пользователей (Quality of Service, QoS) [2], что в совокупности со стремительным ростом объемов трафика приводит к проблеме нехватки радиоресурсов [3]. Одним из возможных подходов к решению этой проблемы является привлечение дополнительных ресурсов, что может быть реализовано за счет системы совместного использования радиочастотного спектра LSA (Licensed Shared Access) [3].

В работе представлен пример функционирования LSA-полосы, взятой мобильным оператором в аренду у владельца, имеющего абсолютный приоритет в использовании своих радиочастот. При необходимости возвращения арендованных частот владельцу, так называемом отказе LSA-полосы, обслуживание пользователей арендатора не прерывается, а переходит в режим ожидания до момента восстановления полосы.

Если перейти к терминам теории массового обслуживания, то рассматриваемая модель соответствует системе массового обслуживания, состоящей из C ненадежных приборов, способных одновременно отказывать с интенсивностью α или восстанавливаться с интенсивностью β , и очереди длины r , причем $r > C$. Будем считать, что находящиеся на приборах заявки сохраняют за собой место в очереди. Заявки поступают согласно закону Пуассона и имеют экспоненциальное время обслуживания.

Модель строится в следующих предположениях. При поступлении новой заявки на обслуживание возможны следующие варианты:

- заявка поступает на обслуживание, занимает прибор и сохраняет за собой место в очереди, если в системе имеются свободные приборы, находящиеся в доступном состоянии;
- заявка поступает в очередь, если в системе нет свободных приборов, находящихся в доступном состоянии, или приборы находятся в недоступном состоянии, а в очереди есть свободные места;
- заявка блокируется, если в очереди нет свободных мест.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-37-00231.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cisco Visual Networking Index: Forecast and Methodology, 2017.
2. Тухвинский В. О., Бочечка Г. С. Перспективы сетей 5G и требования к качеству их обслуживания. — Электросвязь, 2014, № 11, с. 40–43.
3. Gundlach M., Hofmann J., Markwart C., Mohyeldin E. Recent advances on LSA in standardization, regulation, research and architecture design. Proceedings of the 1st International Workshop on Cognitive Cellular Systems (CSS 2014). — IEEE, 2014, p. 1–5.

И. А. Ильичева, Л. А. Панченко, Л. А. Урошлев, Э. Т. Абдуллаев, М. В. Ходыков, Р. В. Полозов, Ю. Д. Нечипуренко (Москва, ИМБ РАН, МГУ, ИОГен РАН; Berlin, MPIMG; Пушкино, ИТЭБ РАН).
Механохимическое расщепление ДНК как инструмент анализа функциональных участков генома.

Памяти Сергея Львовича Гроховского посвящается

В 1952 году было установлено [1], что под влиянием ультразвукового облучения водных растворов ДНК раствор становится менее вязким, а оптическая плотность в районе 260 нм сохраняется. Это свидетельствует о фрагментации молекул ДНК при сохранении ими двуспиральной структуры.

Последующие исследования установили, что образующиеся двуспиральные фрагменты имеют различную длину, фосфорилированный 5'-конец и гидроксильную группу на 3'-конце [2–5], а расщепление ДНК происходит в результате механохимической реакции, индуцируемой кавитационными процессами, возникающими в результате ультразвукового облучения водных растворов [6].

Позиции разрывов межнуклеотидных связей считали случайными, не зависящими от последовательности нуклеотидов. Поэтому ультразвук широко использовали в методиках NGS-секвенирования геномных ДНК. Постулат случайности позиций разрывов межнуклеотидных связей принципиально важен. Только в этом случае можно достоверно определить нуклеотидную последовательность геномной ДНК, длиной порядка 50–200 миллионов нуклеотидных пар, по данным последовательностей их коротких фрагментов (100–300 нуклеотидных пар), которые образуются в результате ультразвукового облучения.

Сергей Львович Гроховский предпринял более детальные исследования процессов ультразвукового расщепления ДНК [7]. Он использовал рестриктивные фрагменты плазмид — это кольцевые внехромосомные генетические структуры бактерий, которые способны автономно размножаться и существовать в цитоплазме бактериальной клетки. Спланированная С. Л. Гроховским схема работы включала предварительную пришивку на 3'-конец рестриктового фрагмента плазмидной ДНК одного (любого из четырех возможных) дополнительного нуклеотида, который был мечен по фосфору (^{33}P). Затем он проводил ультразвуковое облучение ДНК и последующий анализ смесей получившихся фрагментов при помощи электрофореза в полиакриламидном геле. Две стадии, добавленные им в методику экспериментов, привели к неожиданному результату, который полностью противоречил принятым ранее представлениям о случайности позиций ультразвуковых разрывов межнуклеотидных связей.

Оказалось, что ультразвуковая фрагментация ДНК происходит не случайным образом, а специфично к последовательности нуклеотидов. К дальнейшим исследованиям С. Л. Гроховский привлек еще несколько человек, каждый из которых был специалистом в своей узкой области. Всех их объединял интерес к строению и функциям ДНК. Для того чтобы определить зависящие от последовательности частоты расщепления плазмидных ДНК, были разработаны методики, детально описанные в работах [8]–[12]. Электрофорез меченых по 3'-концу фрагментов фиксировал в полиакриламидном геле полосы почернения разной интенсивности. Каждая из полос отвечала фрагменту известной нуклеотидной последовательности. Оцифровка полос позволила провести статистический анализ и получить относительные частоты расщепления всех возможных 16 вариантов динуклеотидов (R) и всех 256 тетрануклеотидов (T) [9]; они приведены на рис. 1–2.

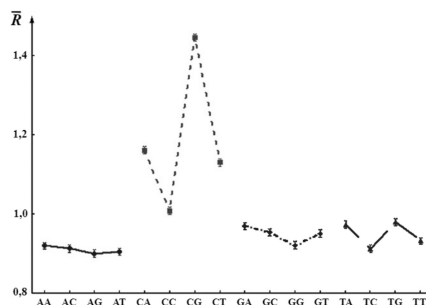


Рис. 1. Средние значения относительных интенсивностей ультразвукового расщепления динуклеотидов

Итак, на интенсивность ультразвуковых расщеплений межнуклеотидных связей двойной спирали ДНК влияет как тип динуклеотида, так и его соседи (нуклеотидный контекст). В чем причина этого явления? После детального анализа данных литературы (ЯМР-исследований малых фрагментов ДНК, рентгеноструктурных работ и конформационных расчетов) мы пришли к выводу, что в основе этого явления лежат различия конформационной динамики фуранозного цикла β -D-дезоксирiboзы в разных нуклеотидах. Фуранозный цикл — это наиболее подвижное звено полимерной молекулы ДНК. В нем постоянно происходят конформационные изменения. Это переходы между двумя низкоэнергетическими областями β -дезоксирiboзы, так называемые $N \leftrightarrow S$ переходы. Частоты переходов и времена жизни N- и S-конформеров β -D-дезоксирiboзы зависят от азотистого основания в нуклеотиде, т. е. от типа нуклеотида.

Специфичность к нуклеотидной последовательности обусловлена механохимическим характером ультразвукового расщепления. При коллапсе кавитационных пузырьков, которые образуются в жидкости при ультразвуковом облучении, возникают большие градиенты скоростей. Оси двойных спиралей выстраиваются вдоль этих градиентов и молекула ДНК подвергается механической деформации до того, как произойдет химическая реакция гидролиза. Модельные построения приводят к выводу, что проекция межнуклеотидной связи $C3'-O$ на ось спирали ДНК будет больше, если цикл β -D-дезоксирiboзы находится в N-конформации.

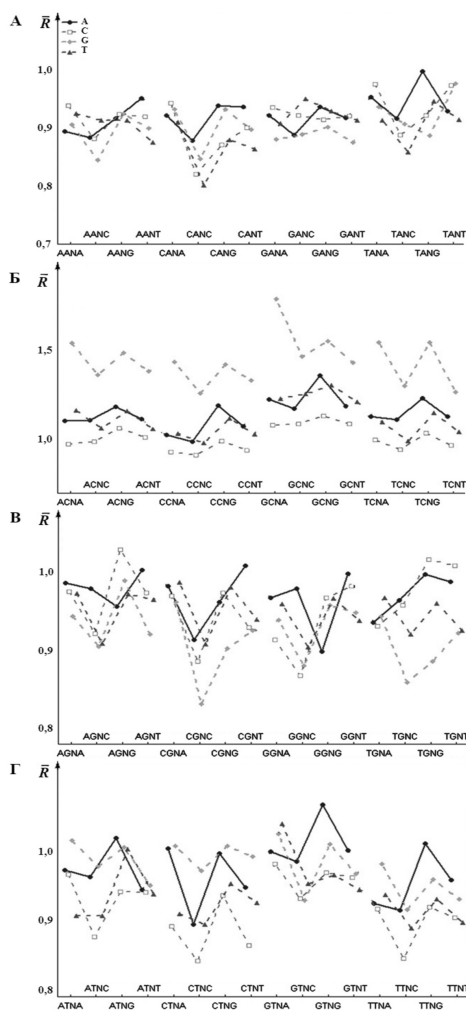


Рис. 2. Средние значения относительных интенсивностей ультразвукового расщепления тетрануклеотидов

Рис. 3 дает схематическое представление изменений ориентации связи $C3'-O$ при конформационных $N \leftrightarrow S$ переходах в В-ДНК (черным показан фрагмент сахарофосфатной цепи с S-состоянием фуранозного кольца, а серым — с N-состоянием). Видно, что угол между осью двойной спирали ДНК (показанной вертикальной осью Z) и направлением связи $C3'-O$ в N-состоянии кольца дезоксирибозы меньше, чем в S-состоянии. Поэтому чем больше время пребывания нуклеотида в N-состоянии, тем больше вероятность разрыва межнауклеотидной связи $C3'-O$. Время жизни N-конформеров в цитидине продолжительнее, чем в остальных трех нуклеотидах, и максимально, когда цитидин входит в состав динуклеотида dCpdG. Поэтому интенсивности расщепления динуклеотидов типа dCpdN (где dN = dA, dC, dG или dT) выше других, а максимум приходится на динуклеотид dCpdG.

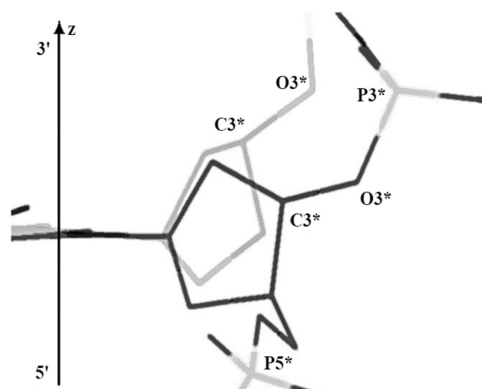


Рис. 3. Схематическое представление возможных изменений ориентации связи C3'-O при N $\leftrightarrow$ S переходах в В-Д

Примечательно, что интенсивности расщепления ассиметричных комплементарных ди- и тетра нуклеотидов различны. Например, *R*-индекс для динуклеотида dCpdA равен 1,130, а для комплементарного ему динуклеотида dTpdG он равен 0.900; *T*-индекс для тетра нуклеотида dApdCpdGpdA равен 1,537, а для комплементарного ему тетра нуклеотида dTpdCpdGpdT он равен 1,263.

Предложенное объяснение механизма, лежащего в основе специфичности к нуклеотидной последовательности ультразвуковых разрывов двуспиральной ДНК, подтверждается характером измененной картины разрывов ДНК, имевшей до облучения повреждения в одной из цепей [13]. Одноцепочечные повреждения ДНК в клетке, так называемые «ники», вызывают резкие изгибы оси спирали, по которым и распознаются репарационными белковыми комплексами клеток.

Следующим шагом был анализ ультразвуковой фрагментации геномных ДНК. Библиотеки фрагментов для NGS-секвенирования доступны для свободного использования. Мы воспользовались ими, чтобы определить частоты позиций расщепления ДНК геномов [14]. Частоты встречаемости каждого из четырех нуклеотидов (dA, dC, dG и dT) на участке в 200 нуклеотидных пар (± 100 нуклеотидных пар) с центром в позиции фрагментации показаны на рис. 4.

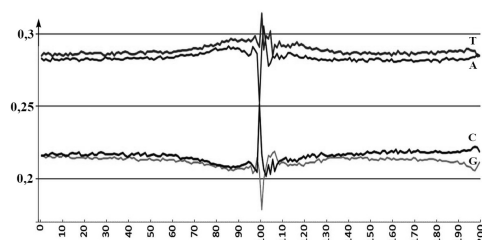


Рис. 4. Частоты встречаемости каждого из четырех дезоксирибонуклеотидов (dA, dC, dG и dT) на участке в 200 нуклеотидных пар с центром в позиции фрагментации

Нуклеотидные последовательности фрагментов можно наложить на референтный геном и таким образом оценить частоты разрывов в ди- и тетра-нуклеотидах при фрагментации геномной ДНК. Мы провели сравнение относительных частот расщепления 16 динуклеотидов, полученных на основании данных NGS-фрагментации геномных ДНК тремя методами, в основе которых лежит ультразвуковое облучение с относительными частотами ультразвукового облучения плазмидных ДНК [14]. В геномной ДНК частоты ультразвукового расщепления нуклеотидных последовательности также зависят от типа динуклеотидов (рис. 5). И характер этой зависимости в целом такой же, как и при расщеплении плазмидных ДНК. Но единственный динуклеотид, относительное расщепление которого в геномной ДНК значительно выше, чем в плазмидных ДНК, — это динуклеотид dCpdG. Почему? В отличие от плазмидных ДНК, в геномных ДНК определенная часть dCpdG-динуклеотидов метилирована. Наличие метильной группы в 5-м положении кольца цитозина играет важную информационную роль в эпигенетическом развитии организмов.

Мы предположили, что метилированные динуклеотиды dCpdG имеют более высокую частоту ультразвукового расщепления. Это предположение мы проверили в последующей работе, где провели анализ относительных частот встречаемости метилированного и неметилированного динуклеотидов dCpdG в позициях расщепления геномных ДНК. Для этого были использованы данные бисульфитного секвенирования. Они позволяют однозначно определить позиции метилированных и неметилированных dCpdG в геномной последовательности. Оказалось, что встречаемость метилированных dCpdG в позициях расщепления примерно в 1.5 раза выше неметилированных. Статья с этими результатами подготовлена к печати.

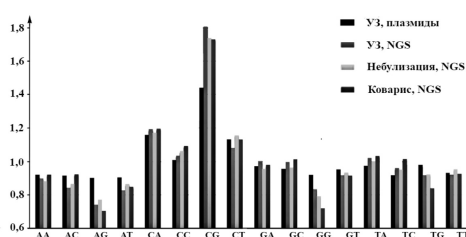


Рис. 5. Средние значения относительных частот расщепления 16 динуклеотидов, по данным NGS-фрагментации геномных ДНК тремя методами, в основе которых лежит ультразвуковое облучение, и плазмидных ДНК

Явление специфичности интенсивности ультразвуковых разрывов к нуклеотидной последовательности ДНК может быть использовано в качестве информационного маркера геномного текста. Давно известно, что информация об аминокислотной последовательности белков закодирована в генах последовательностью нуклеотидных триплетов. Но в геномной ДНК нуклеотидная последовательность несет также информацию и о регуляции процессов, запускающих синтез нужных генов в нужное время в клетке (процессов транскрипции генов).

Мы предположили, что особенности структуры и конформационной динамики различных участков последовательностей геномных ДНК являются информативной основой, регулирующей эти процессы. Для проверки этого предположения, мы воспользовались существующей базой промоторных участков РНК-полимеразы II (EPD NEW <http://epd.vital-it.ch>), которая содержит коллекцию экспериментально подтвержденных промоторных последовательностей различных организмов. Объемы выборок составляли: 23360 промоторов человека (*H. sapiens*); 21239 промоторов домового мыши (*M. musculus*); 15073 промоторов дрозофилы (*D. melanogaster*); 10726 промоторов рыбки (*D. rerio*); 7120 промоторов червя (*C. elegans*); 10229 промоторов растения (*A. thaliana*); и промоторы одноклеточных грибов — 4324 промотора *S. cerevisiae*; 3440 промоторов *S. pombe*. На начальном этапе работы мы проанализировали профили текстовых характеристик нуклеотидных последовательностей промоторов разных организмов, которые оказались существенно различными. Затем мы построили так называемые «обобщенные профили» изменений шести механических и структурных параметров, индексы которых для каждого из десяти возможных двуспиральных дуплексов имеются в базе (<http://diprodb.fli-leibniz.de>). Термином «обобщенные профили» мы называем те профили, которые получены суммированием индивидуальных профилей каждого из промоторов базы организма. Мы проанализировали поведение энергии стэкинга, структурных параметров Roll и Slide, жесткости дуплексов на отклонения этих параметров от равновесных значений, а также жесткости дуплексов в отношении изгиба двойной спирали в сторону узкого желоба.

Также мы построили «обобщенные профили» изменений индексов ультразвукового расщепления. При построении профилей, характеризующих ультразвуковое расщепление, мы использовали три варианта индексов: R — относительные частоты расщепления межнауклеотидной связи в 16 динуклеотидах; T — относительные частоты расщепления центральной межнауклеотидной связи в 256 тетрануклеотидах; индекс S , который является их комбинацией: $S = (T - R)/T$. Индекс S несет дополнительную информацию о последовательности, он показывает, как ближайшие соседи (контекст) влияют на интенсивность конформационных движений в динуклеотиде. Если $S < 0$, то контекст ослабляет интенсивность движений, если $S > 0$, то повышает. Ультразвуковые профили строились как для кодирующей, так и для комплементарной ей цепи.

Профили всех описанных характеристик показаны в работе [15]. Они свидетельствуют о том, что, несмотря на отличия текстовых характеристик промоторов разных организмов, профили их механических и структурных параметров, а также ультразвуковых индексов имеют одинаковые характерные черты у всех изученных организмов. Эти черты профилей промоторов выделяют их среди других участков геномных последовательностей. Наиболее характерный вид имеют фрагменты профилей в окрестности позиции начала транскрипции (TSS), которая может захватывать от 6 до 8 нуклеотидных пар. Все структурные и ультразвуковые характеристики на этом участке меняются скачкообразно на каждом шаге. Это свидетельствует о потере регулярности двойной спирали на этом участке. Другим характерным фрагментом профилей промоторов является так называемый ТАТА-бокс. Это последовательность в окрестности позиции -30 относительно TSS, непосредственно связывающая регуляторный белок TBP.

Для всех организмов характер изменений структурных и физико-химических индексов на этом участке одинаков. Структурные характеристики указывают на существенное расширение малого желоба двойной спирали на этом участке и увеличение жесткости к изгибу двойной спирали в сторону малой бороздки. Более детальное описание особенностей профилей каждой из характеристик дано в работах [15, 16].

На рис. 6 А-Е приведены профили различных ультразвуковых индексов промоторов человека. Это профили относительных частот расщепления динуклеотидов (R -индекса) в последовательностях кодирующей (частый пунктир) и не кодирующей (редкий пунктир) цепях (рис. 6 А); профили разности R -индексов кодирующей и не кодирующей цепей (рис. 6 Б); профили относительных частот расщепления тетра нуклеотидов (T -индекса) в последовательностях кодирующей (частый пунктир) и не кодирующей (редкий пунктир) цепях (рис. 6 В); профили разности T -индексов кодирующей и не кодирующей цепей (рис. 6 Г); профили S -индексов в последовательностях кодирующей (частый пунктир) и не кодирующей (редкий пунктир) цепях (рис. 6 Д); профили разности S -индексов кодирующей и не кодирующей цепей (рис 6Е).

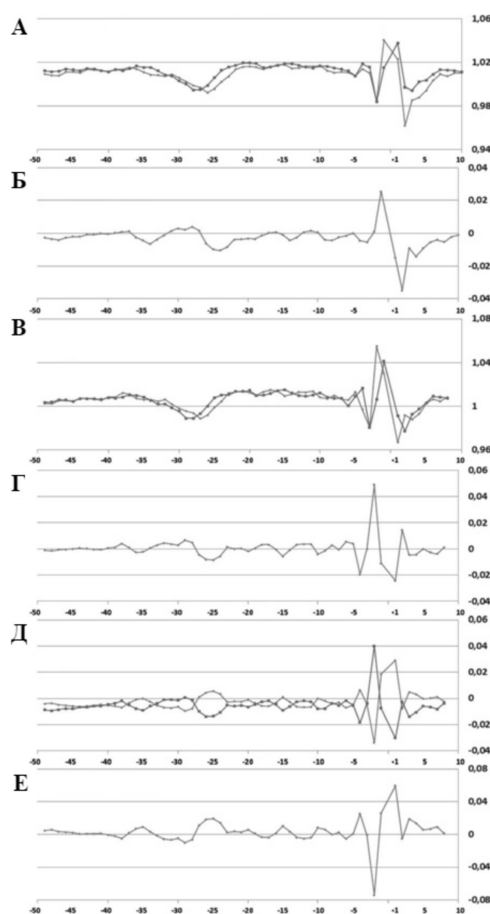


Рис. 6. Профили индексов ультразвукового расщепления промоторов человека (*H. sapiens*)

Наиболее низкими значениями индексов R и T характеризуются позиции от -32 до -24 бр относительно TSS, что свидетельствует об уменьшении интенсивности конформационных движений в цепях ДНК на этом участке. У человека в этих позициях расположен ТАТА-бокс, ответственный за связывание регуляторного белкового комплекса. Профиль индекса S указывает на периодические изменения интенсивностей конформационных движений в обеих комплементарных цепях вплоть до позиции -3 бр, которые происходят в противофазе. В позиции ТАТА-бокса амплитуда этих отличий наибольшая.

Итак, с уверенностью можно сказать, что нуклеотидная последовательность в промоторных областях геномов характеризуется такими свойствами, которые способствуют перестройкам пространственной структуры двойной спирали при связывании регуляторных белков и облегчают последующее формирование так называемого «открытого комплекса», необходимого для транскрипции.

Сергея Львовича больше нет с нами. А явление, которое он открыл, изучено и использовано не до конца. Пока не вполне очевиден его механизм. И сохраняется широчайшее поле для использования эффекта специфичности ультразвукового расщепления к нуклеотидной последовательности при анализе структуры ДНК и ее функционирования в клетке. Мы будем рады, если кто-либо пожелает вместе с нами продолжать эти исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Laland S. G., Overend W. W. G., Stacey M. Deoxypentose nucleic acids. Part III. Some effects of ultrasonic waves on deoxypentose nucleic acids. — J. Chem. Soc., 1952, p. 303–310.
2. Doty P., McGill B. B., Rice S. A. The properties of sonic fragments of deoxyribonucleic acid. — Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1958, v. 44, p. 432–438.
3. Freifelder D., Davison P. F. Studies on the sonic degradation of deoxyribonucleic acid. — Biophys. J., 1962, v. 2, p. 235–247.
4. Pritchard N. J., Hughes D. E., Peacocke A. R. The ultrasonic degradation of biological macromolecules under conditions of stable cavitation. I. Theory, methods, and application to deoxyribonucleic acid. — Biopolymers., 1965, v. 4, p. 259–273.
5. Elsnér H. I., Lindblad E. B. Ultrasonic degradation of DNA. — DNA, 1989, v. 8, p. 697–701.
6. Basedow A. M., Ebert E. B. — Ultrasonic degradation of polymers in solution. — In: Advances in Polymers Science. A. Abe, A.-C. Albertsson, J. Genzer, editors. Berlin. Heidelberg: Springer, 1977, v. 22, p. 83–148.
7. Grokhovsky S. L. Specificity of DNA cleavage by ultrasound. — Mol. Biol. (Mosk). 2006, V. 40, p. 317–325.
8. Grokhovsky S. L., Il'icheva I. A., Nechipurenko D. Yu., Panchenko L. A., Polozov R. V. *и Nechipurenko Yu. D.* Ultrasonic cleavage of DNA: quantitative analysis of sequence specificity. — Biophysics (Russian), 2008, v. 53, p. 417–425.
9. Grokhovsky S. L., Il'icheva I. A., Nechipurenko D. Yu., Golovkin M. V., Panchenko L. A., Polozov R. V., Nechipurenko Yu. D. Sequence-specific ultrasonic cleavage of DNA. — Biophys. J., 2011, v. 100, № 1, p. 117–125.
10. Nechipurenko Yu. D., Golovkin M. V., Nechipurenko D. Yu., Il'icheva I. A., Panchenko L. A., Polozov R. V., Grokhovsky S. L. Characteristics of ultrasonic cleavage of DNA. — J. Strukt. Khimii (Russian), 2009, v. 50, p. 1040–1047.

11. Grokhovsky S. L., Il'icheva I. A., Nechipurenko D. Yu., Golovkin M. V., Taranov G., Panchenko L. A., Polozov R. V., Nechipurenko Yu. D. Quantitative analysis of electrophoresis data — application to sequence-specific ultrasonic cleavage of DNA. In: Gel Electrophoresis — Principles and Basics. /Ed. by S. Magdeldin. Niigata—London: InTech, 2012.
12. Grokhovsky S. L., Il'icheva I. A., Nechipurenko D. Yu., Golovkin M. V., Panchenko L. A., Polozov R. V., Nechipurenko Yu. D. — In: Advances in Engineering Research, 2014, v. 8, p. 213–236. /Ed. by Victoria M. Petrova. Nova Sci. Publ., ISBN: 978-1-63321-282-4.
13. Il'icheva I. A., Nechipurenko D. Yu., Grokhovsky S. L. Ultrasonic cleavage of nicked DNA. — Journal of Biomolecular Structure and Dynamics, 2009, v. 27, № 3, p. 391–397.
14. Poptsova M. S., Il'icheva I. A., Nechipurenko D. Y., Panchenko L. A., Khodikov M. V., Oparina N. Y., Polozov R. V., Nechipurenko Y. D., Grokhovsky S. L. Non-random DNA fragmentation in next-generation sequencing. — Sci Rep., 2014, v. 4, p. 4532–4537.
15. Il'icheva I. A., Khodikov M. V., Poptsova M. S., Nechipurenko D. Yu., Nechipurenko Yu. D., Grokhovsky S. L. Structural features of DNA that determined RNA polymerase II core promoter. — BMC genomics, 2016, v. 17, p. 973–993.
16. Il'icheva I. A., Potsova M. S., Nechipurenko Yu. D., Grokhovsky S. L. — The proceedings is a compilation of the reports of XII International science-technical conference «Modern Trends in Biological Physics and Chemistry, BPPC-2017», organized by Sevastopol State University 2–6 of October, 2017.

А. П. Ковалевский, Н. С. Закревская (Новосибирск, НГТУ, НГУ). **Элементарная вероятностная модель литературных текстов и пуассонизация.**

Бахадур [1] изучал бесконечную урновую схему, в которой вероятности убывают в соответствии со степенным законом. Он нашел асимптотику роста математического ожидания числа непустых урн и доказал закон больших чисел. Отметим, что убывание вероятностей слов в соответствии со степенным законом в естественных языках известно как закон Ципфа [6], а рост числа различных слов в соответствии со степенным законом в лингвистике известно как закон Хипса [4]. В нашей модели выбор очередного слова из словаря моделируется выбором урны для очередного шара. Карлин [5] предложил пуассонизацию бахадуровской модели, в соответствии с которой длина текста является случайной величиной, имеющей распределение Пуассона и не зависящей от процесса выбора слов. Используя этот подход, Карлин доказал центральную предельную теорему для числа разных слов. Барбур [2] показал, что можно предложить более аккуратную пуассоновскую аппроксимацию. Чебунин и Ковалевский [3] доказали функциональную центральную предельную теорему, используя пуассонизацию, предложенную Карлиным.

Мы используем эту функциональную теорему для анализа однородности текстов. Для этого мы строим такие оценки параметра Ципфа, для которых мы можем вычислить асимптотику их совместного распределения с процессом числа разных слов. Используя эти оценки, мы конструируем процесс, асимптотика которого известна в случае однородного текста. Однородность литературных текстов анализируется критерием типа омега-квадрат. Примеры применения включают анализ однородности текстов на французском, английском, русском, китайском языках.

Исследование поддержано грантом РФФИ 17-01-00683.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bahadur R. R.* On the number of distinct values in a large sample from an infinite discrete distribution. — *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, 1960, v. 26A, is. 2, с. 67–75.
2. *Barbour A. D.* Univariate approximations in the infinite occupancy scheme. — *Alea*, 2009, v. 6, с. 415–433.
3. *Chebunin M., Kovalevskii A.* Functional central limit theorems for certain statistics in an infinite urn scheme. — *Statist. Probab. Letters*, 2016, v. 119, с. 344–348.
4. *Heaps H. S.* Information Retrieval: Computational and Theoretical Aspects, N. Y. etc.: Academic Press, 1978, 534 p.
5. *Karlin S.* Central limit theorems for certain infinite urn schemes. — *J. Math. Mech.*, 1967, v. 17, № 4, p. 373–401.
6. *Zipf G. K.* The Psycho-Biology of Language. London: Routledge, 1936, 236 p.

Е. Ю. Лисовская^{1,2}, А. А. Галилейская², Е. Н. Чернышова², С. П. Моисеева², М. Пагано³, Ю. В. Гайдамака^{1,4}
(¹ Москва, РУДН, ² Томск, НИ ТГУ, ³ Pisa, University of Pisa, ⁴ Москва, ФИЦ ИУ РАН). **Об одном подходе к исследованию ресурсных СМО.**

В работе, представленной данным сообщением, предлагается подход к исследованию ресурсных систем массового обслуживания (РСМО), который заключается в комбинации методов: метода многомерного динамического просеивания и метода асимптотического анализа.

Традиционно при моделировании сетей связи возникали ассоциации лишь о длительности передачи сообщения или продолжительности вызова. Но сейчас это предположение становится менее актуальным в современных сетевых архитектурах, где кроме длительности соединения необходимо также учитывать и ширину выделенной полосы вещания, и количество памяти, и т. д., которые освобождаются по завершении соединения. Такие модели известны в литературе как ресурсные системы массового обслуживания (см. [1, 2] и ссылки в них).

В своих работах авторы получают совместное распределение вероятностей процессов, описывающих количество занятых серверов и общий объем занятых ресурсов, получают параметры соответствующего многомерного гауссовского распределения, которые определяются параметрами входящего потока, длительности обслуживания и запросов к ресурсам (см. [3–6] и др.). Безусловно, параметры гауссовской аппроксимации зависят и от конфигурации системы.

В первую очередь, метод динамического просеивания. Метод заключается в том, что мы фиксируем некоторый произвольный момент времени в будущем и, в момент поступления заявки в систему, формируем вероятности того, где она будет находиться в зафиксированный момент. Она может либо закончить обслуживание и покинуть систему, либо находиться на обслуживании на какой-либо стадии в зависимости от конфигурации системы. Так, в [3] рассматривается неоднородная РСМО, в которой каждый поступающий запрос будет требовать различное количество ресурса и времени для обслуживания (текстовые сообщения, аудиозвонок, видеозвонок, видеоролик и т. д.); в [4] моделируется процесс обработки данных в виде многоресурсной системы, реализующей предоставление разного типа ресурса каждому требованию одновременно.

Здесь же отметим работу [5], посвященную результатам моделирования последовательной обработки данных в виде многофазной РСМО, и работу [6], посвященную моделированию параллельного обслуживания, когда каждое сообщение может быть передано частями с разных базовых станций (распаковка), и копирования запроса, когда необходимо хранить копию сообщения в резервном хранилище.

Нетрудно заметить, что динамические вероятности просеивания для каждого случая определяются по-разному, так как напрямую зависят от дисциплины обслуживания, а она, как мы видим, в каждом случае разная.

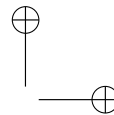
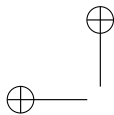
Что касается метода асимптотического анализа, так это то, что предельное условие влияет на вид параметров допредельных аппроксимаций. В работах [3–6] и других авторы рассматривают предельное условие растущей интенсивности входящего потока. Таким образом, результатом исследований становится многомерная гауссовская аппроксимация распределения вероятностей числа занятых приборов и суммарного объема занятого ресурса, зависящая и от параметра N — интенсивности входящего потока.

Следующим этапом исследований авторов является имитационное моделирование рассматриваемых систем, получение соответствующих эмпирических распределений вероятностей и сравнение их с аппроксимирующими распределениями при одинаковых заданных параметрах. Многочисленные эксперименты показывают, что аппроксимацию можно применять при достижении интенсивности поступления в 10 и более раз выше интенсивности обслуживания. А для некоторых исходных данных это отношение может быть и еще меньше, что является применимым в современных сетях результатом.

Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 17-07-00845 и № 18-07-00576.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ateya A., Muthanna A., Vybornova A., Gudkova I., Gaidamaka Yu., Abuarqoub A., Algarni A., Koucheryavy A. Model mediation to overcome light limitations-toward a secure tactile internet system. — J. Sensor Actuat. Networks, 2019, V. 8, № 1.
2. Горбунова А. В., Наумов В. А., Гайдамака Ю. В., Самуйлов К. Е. Ресурсные системы массового обслуживания с произвольным обслуживанием. — Информатика и ее примен., 2019, Т. 13, № 1, с. 99–107.
3. Lisovskaya E., Moiseeva S., Pagano M. Multiclass GI/GI/∞ queueing system with random resource requirements. — Comm. Comput. Inform. Sci., 2018, v. 912, p. 129–142.
4. Lisovskaya E. Y., Moiseev A. N., Moiseeva S. P., Pagano M. Modeling of Mathematical Processing of Physics Experimental Data in the Form of a Non-Markovian Multi-Resource Queuing System. — Russian Phys. J., 2019, Vol.61, No.12, P. 2188–2196.
5. Галилейская А. А., Лисовская Е. Ю. Асимптотический анализ многофазной бесконечнолинейной ресурсной системы массового обслуживания с входящим ММРР потоком. — Вестник Томского гос. ун-та. Сер. Управление, вычислительная техн. и информат., 2018, № 45, с. 13–21.
6. Чернышова Е. Н., Лисовская Е. Ю. Двумерная гауссовская аппроксимация суммарных объемов занятого ресурса с ММРР-входящим потоком заявок и их параллельным обслуживанием. — В сб.: Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019): материалы XVIII Международной конференции им. А. Ф. Терпугова, 26–30 июня 2019 г. Ч. 2. Томск: Изд-во НТЛ, 2019, с. 287–292.



Е. Г. Медведева^{1,2}, Ф. А. Москалева¹, А. В. Горбунова, Ю. В. Гайдамака^{1,2} (Москва, ¹ РУДН, ² ФИЦ ИУ РАН). **О построении модели многопользовательской передачи многоантенной системы ММО в дискретном времени.**

В настоящее время остается актуальной задача увеличения пропускной способности современных систем сотовой связи, поскольку число пользователей постоянно растет и увеличиваются объемы передаваемой информации. Одним из наиболее выгодных с экономической точки зрения способов по сравнению с увеличением числа базовых станций является применение технологии многоантенной передачи (англ. ММО, Multiple Input Multiple Output) [1]. Несмотря на повышение скорости передачи данных, обеспечиваемой применением ММО, можно добиться лучшей пропускной способности за счет использования эффективных стратегий обслуживания [2].

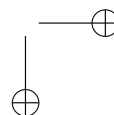
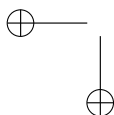
Авторами исследуется система ММО в условиях трех стратегий, и предложены математические модели в виде системы массового обслуживания (СМО) в дискретном времени.

Для моделирования функционирования системы ММО в дискретном времени разделим временную ось на интервалы (такты) постоянной длины Δt и сделаем следующие предположения.

1. Все запросы пользователей на загрузку файла, отправленные в течение текущего такта, поступают на базовую станцию одновременно в начале следующего такта.
2. Пользователи меняют свое местоположение в момент сразу после начала такта. В течение такта пользователи не перемещаются, так что для каждого пользователя скорость получения данных, зависящая от соответствующей его местоположению канальной матрицы $\mathbf{H}$, определяется в начале такта и не меняется до окончания такта.
3. Пользователи, завершившие загрузку файла в течение текущего такта, покидают систему одновременно в момент непосредственно перед началом следующего такта.

В этих предположениях величина пропускной способности на каждом такте будут принимать различные, но неизменные в течение такта значения. Предположим, что при наличии подключенных к системе ММО пользователей базовая станция непрерывно осуществляет передачу данных, что соответствует обслуживанию пользователей в соответствии с некоторой стратегией, в зависимости от которой передаваемый базовой станцией вектор комплексных информационных символов будет предназначаться одному или нескольким пользователям одновременно.

Интерес представляют три стратегии [3], согласно которым на n -м такте, $n \geq 1$, на обслуживание выбирается пользователь, который провел в системе больше всего времени, пользователь, радиоканал которого обеспечивает максимальную пропускную способность на приемной стороне, подмножество пользователей с максимальной суммарной пропускной способностью.



Обслуживание пользователей системы ММО можно описать случайным процессом (СП) в дискретном времени $\mathbf{X}_n = (\xi_n, \mathbf{F}_n, \mathbf{A}_n)$, где

случайная величина ξ_n — число заявок в системе или пользователей системы ММО,

вектор $\mathbf{F}_n = (F_{1n}, F_{2n}, \dots, F_{\xi_n n})$ — вектор остаточных длин заявок, находящихся в системе,

вектор $\mathbf{A}_n = (A_{1n}, A_{2n}, \dots, A_{\xi_n n})$ — вектор времен пребывания заявок, находящихся в системе, на n -м такте.

Под остаточной длиной заявки подразумевается размер запрошенного пользователем файла — случайный объем данных, предназначенной конкретному пользователю.

Построенный СП в дискретном времени $\mathbf{X}_n = (\xi_n, \mathbf{F}_n, \mathbf{A}_n)$ может быть исследован с помощью аппарата цепей Маркова, при этом могут быть получены стационарные характеристики процесса. Для исследования влияния стратегий обслуживания пользователей на пропускную способность системы проводится моделирование с помощью известных моделей в дискретном времени с групповым поступлением и ординарным обслуживанием $Geo^{[X]}|Geo|1$, а также с помощью моделей систем массового обслуживания в непрерывном времени $M|G|1$, которое позволяет получить в замкнутой форме формулы для оценки среднего времени загрузки файла пользователем и провести сравнение исследуемых стратегий обслуживания пользователей системы ММО [4].

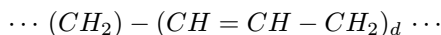
Публикация подготовлена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18-07-00576 и № 18-00-01555 (18-00-01685).

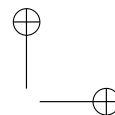
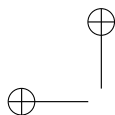
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications, IEEE std 802.11, 2016.
2. Daldoul Y., Meddour D., Ksentini A. IEEE 802.11n/ac data rates under power constraints. — IEEE International Conference on Communications, Kansas City, USA. — May 20–24, 2018.
3. Aiy M., Shakkattai S., Heath R. W. Spatially greedy scheduling in multi-user MIMO wireless systems. — The Thirty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems Computers, 2003, v. 1, p. 982–986.
4. Горбунова А. В., Медведева Е. Г., Гайдамака Ю. В., Шоргин В. С., Самуйлов К. Е. Эффективные стратегии обслуживания пользователей в многопользовательской системе ММО — Информационно-управляющие системы, 2019, № 4, с. 69–81.

А. Л. Рабинович, А. Л. Талис (Петрозаводск, ИБ КарНЦ РАН; Москва, ИНЭОС РАН). Полиненасыщенные углеводородные цепи фосфолипидов биомембран с метилепрерывающимися двойными связями и некристаллографическая симметрия.

Одной из общих особенностей строения наиболее распространенных полиненасыщенных углеводородных (жирнокислотных) цепей молекул фосфолипидов биологических мембран является тот факт, что расположение в них двойных связей (как правило, конфигурации *cis*) друг относительно друга является вполне определенным. А именно, полиненасыщенный фрагмент цепи обычно имеет вид



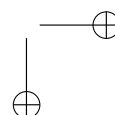
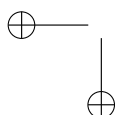


Здесь d — количество двойных связей в цепи; C и H — атомы углерода и водорода, соответственно. Иными словами, двойные связи являются метилен-прерывающимися, т.е. между каждой их парой расположена только одна метиленовая группа CH_2 [1, 2]. Такое расположение двойных связей приводит к наличию у этих цепей свойств, которые позволяют выделить данные цепи в целом среди цепей другого строения. Например, методом Монте-Карло были проведены расчеты [3, 4] равновесной гибкости линейных углеводородных цепей с количеством атомов углерода 18, 20 и 22 и разными вариантами расположения в них двойных связей (между каждой парой двойных связей располагали от 1 до 10 групп CH_2). Оказалось, что участок ненасыщенной углеводородной цепи с метиленпрерывающимися двойными связями *cis*, количество которых в цепи максимально, обладает *наибольшей* гибкостью по сравнению с углеводородными участками равной длины (т.е. с тем же количеством атомов углерода), но с *любым иным расположением* и/или количеством двойных связей [3, 4]. Было также показано, что даже минимальное изменение строения цепи (например, перемещение двойной связи на один атом углерода) весьма заметно влияет на ее свойства (в данном случае — на гибкость) [3, 4]. Цепи с неметиленразделенными двойными связями встречаются, как правило, лишь в малых количествах [3, 4], поэтому можно полагать, что наиболее подходящими для биомембраны свойствами жирнокислотные цепи фосфолипидов обладают в том случае, когда двойные связи в них чередуются именно с *одной* метиленовой группой CH_2 .

С другой стороны, факт наибольшей распространенности такого общего строения («метиленпрерываемости» двойных связей) [1, 2] является косвенным свидетельством того, что может существовать некоторый идеальный структурный образец, позволяющий подтвердить концепцию [5–7] о наличии соответствия «некристаллографической» симметрии обсуждаемого фрагмента жирнокислотных цепей симметрии этого идеального образца; образец должен быть некоторым фрагментом высокосимметричных тетракоординированных структур в 3-мерных неевклидовых пространствах постоянной положительной (S^3) и/или отрицательной (H^3) кривизны, который можно отобразить в 3-мерное евклидово пространство E^3 .

Действительно, объединим по торцевым ребрам несколько декорированных [7] тетраблоков, каждый из которых отображает симметрию фрагмента цепи. Вершины тетраблоков после исключения общего торцевого ребра (т.е. двух вершин) в каждой паре, осуществляемого для достижения наибольшей симметрии [7], можно разделить на отдельные совокупности. Те декорированные тетраблоки, которые объединены по торцевым ребрам с двумя другими декорированными тетраблоками (по одному с каждой стороны), из 11-вершинных [7] преобразуются в 7-вершинные фрагменты ($11 - 2 - 2 = 7$). При этом области стыковки каждой пары 7-вершинных фрагментов представляют собой плоские структуры. Если при реализации в E^3 в вершинах этих фрагментов расположить атомы углерода C и водорода H , то фрагменты приобретают вид $= CH - CH_2 - CH =$. Очевидно, что эта конфигурация отвечает области между двойными связями в цепи, если они являются именно «метиленпрерывающимися».

Выявление некристаллографической симметрии в жирнокислотных цепях именно с метиленпрерывающимися двойными связями углубляет представление о молекулярных основах функционирования биомембран.



Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (гос. задание КарНЦ РАН №0218-2019-0076, №г.р. АААА-А17-117031710039-3 — для А.Л.Р.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nelson D. L., Cox M. M. Lehniger Principles of Biochemistry*. N.Y.: Freeman W.H. and Co., 2013.
2. *Mouritsen O. G., Bagatolli L. A. Life - As a Matter of Fat. Lipids in a Membrane Biophysics Perspective*. Heidelberg et al.: Springer, 2016, 298 p.
3. *Рабинович А. Л., Рупатти П. О.* Биофизика, 1990, 35, 5, с. 775–778.
4. *Rabinovich A. L., Ripatti P. O.* Chem. Phys. Lipids, 1991, 58, 3, p. 185–192.
5. *Талис А. Л., Рабинович А. Л.* Кристаллография, 2019, 64, 3, с. 341–350.
6. *Талис А. Л., Рабинович А. Л.* Алмазоподобный 4-мерный многогранник $\{240\}$ как основа описания некристаллографической симметрии линейных тетракоординированных структур: составные тетраблоки. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 90–92.
7. *Рабинович А. Л., Талис А. Л.* Углеводородно-подобные цепи с некристаллографической симметрией и комбинированные тетраблоки. — Обзорение прикл. и промышл. матем., 2019, т. 26, в. 1, с. 84–86.

Е. В. Савушкин, Т. В. Захарова (Москва, ВМК МГУ; Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН). **Исследование существования решения для стохастических дифференциальных уравнений в классе L_p , где $1 < p < 2$.**

Известно, что если при $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq L|x - y|, \\ b(t, x)^2 + \sigma(t, x)^2 &\leq c(1 + x^2), \end{aligned}$$

то решение СДУ

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = Z$$

в пространстве L_2 существует и единственно [1]. Исследуем существование решения в пространстве L_p . Возьмем $X_t^0 = Z, t \in [0, T]$ и положим для $n \geq 1$

$$X_t^{(n)} = Z + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW(s).$$

1) Доказательство прогрессивной измеримости для функций сноса $b(s, X_s)$, диффузии $\sigma(s, X_s)$ и $X_t^{(n)}$ проводится аналогично [1]. Докажем, что они лежат в L_p . Найдем $\mathbf{M}(X_t^{(n)})^p$.

Последовательно применим неравенство Йенсена и интегральное неравенство Йенсена.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(X_t^{(n)})^p &\leq 3^{p-1} \left(\mathbf{M} Z^p + \mathbf{M} \left(\int_0^t b(s, X_s^{(n-1)}) ds \right)^p \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{M} \left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s \right)^p \right) \\ &\leq 3^{p-1} \left(\mathbf{M} Z^p + T^{p-1} \int_0^t \mathbf{M} (b(s, X_s^{(n-1)}))^p ds \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{M} \left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s \right)^p \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Применяя к третьему слагаемому последовательно мартингалное неравенство из работы [2] и неравенство Йенсена для математического ожидания, получаем

$$\mathbf{M} \left(\int_0^t \sigma(s, X_s^{(n-1)}) dW_s \right)^p \leq B_p \left(\int_0^t \mathbf{M} |\sigma(s, X_s^{(n-1)})|^2 ds \right)^{p/2}$$

Как можно заметить, если функции диффузии и сноса удовлетворяют условию

$$b(t, x)^2 + \sigma(t, x)^2 \leq c(1 + x^p), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad 1 \leq p < 2,$$

то интегралы в (1) ограничены и для произвольного $1 \leq p < 2$ получаем, что $X_t^{(n)}$ принадлежат пространству L_p .

2) Исследуем сходимость данной последовательности. Для первого члена в последовательности приближений после преобразований получаем (база индукции)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^p &\leq 2^{p-1} T^{p-1} \int_0^t \mathbf{M} (b(s, Z))^p ds \\ &\quad + 2^{p-1} B_p \left(\int_0^t \mathbf{M} |\sigma(s, Z)|^2 ds \right)^{p/2} \\ &\leq M_1 t + M_2 t^{p/2} \\ &\leq \begin{cases} M_1 t, & t \geq 1, \\ M_3 t^{p/2}, & t \in [0, 1), \end{cases} \end{aligned}$$

где M_1, M_2, M_3 — константы.

Для n -го приближения справедливы следующие выкладки.

Пусть выполнено условие

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq L |x - y|^{p/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T].$$

Тогда можно получить следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^p \\ & \leq 2^{p-1} L^p T^{p-1} \int_0^t \mathbf{M} |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds \\ & \quad + 2^{p-1} B_p L^{p/2} \left(\int_0^t \mathbf{M} |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds \right)^{p/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

При $t \in [0, 1)$ второй интеграл в (2) будет больше первого, поэтому ограничиваем им. Далее по индукции заключаем, что при

$$M = \max \{M_3, 2^{p-1} L^p, T^{p-1} + 2^{p-1} B_p L^{p/2}\}$$

справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^p & \leq \frac{M^{r^n} M^{r^{n-1}} \dots M t^{r^{n+1} + r^n + \dots + r}}{r^{r^n} (r^2 + r)^{r^{n-1}} \dots (r^{n+1} + r^n + \dots + r)} \\ & \leq \frac{e^{(r^n + r^{n-1} + \dots + 1) \ln M} t^{r^{n+1} + r^n + \dots + r}}{\exp \{ \sum_{i=0}^n r^i \ln \sum_{k=1}^{n-i+1} r^k \}} \\ & \rightarrow C_1 t^{C_2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $r = p/2$, C_1, C_2 — постоянные.

Если $t \in [1, T]$, то при таких n , что

$$\frac{T}{n+1} < 1,$$

второй интеграл в (2) снова становится больше первого и верна предыдущая оценка.

Таким образом доказано, что последовательные приближения лежат в L_p , и расстояния между ними на бесконечности не превосходят значения полинома от t .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-07-00252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005, 403 с.
2. Новиков А. А. О моментных неравенствах для стохастических интегралов. — Теория вероятн. и ее примен., 1971, т. 16, в. 3, с. 538–541.

М. Х. Смагулов (Москва, МГУ). **Разработка методики для анализа состояния сельскохозяйственных земель и посевов на основе данных дистанционного мониторинга.**

Сельское хозяйство является сферой активного развития и внедрения методов, основанных на использовании спутниковых данных — разрабатываются и используются методы оценки и распознавания типов и границ посевов, прогнозирования урожайности, оценки степени эрозии почвы и множества других важных задач.

Цель исследования заключается в разработке методики на основе данных дистанционного мониторинга с учетом особенностей сельскохозяйственных условий в Российской Федерации.

Пусть у нас имеется RGB изображение соответствующей территории:

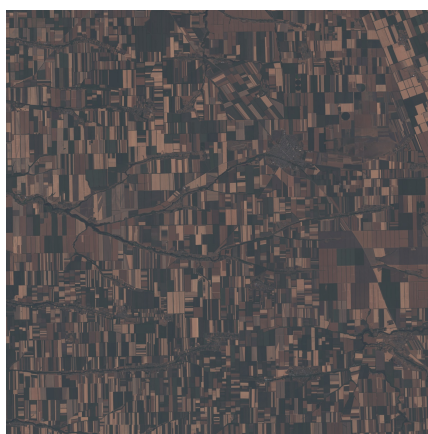


Рис. 2.1. Изображение полей в юго-западной части Ростовской области

Для классификации сельскохозяйственных угодий по космическим снимкам часто используют известный метод обработки спектральных характеристик — расчет вегетационных индексов. Наиболее часто при описании растительного покрова используется вегетационный индекс NDVI (Normalized Difference Vegetation Index) [1]:

$$NDVI = \frac{R_{ir} - R_r}{R_{ir} + R_r}, \quad (1)$$

где R_{ir} и R_r яркости в инфракрасном и красном диапазонах соответственно.

Любую поверхность можно охарактеризовать с помощью спектрального образа, который представляет собой кривую зависимости ее отражательной способности от длины волны, либо от волнового числа. Самый простой способ описания поведения кривой — производная для каждой спектральной полосы, которая представляет собой отношение приращений отражательной способности $d\rho$ и длины волны $d\lambda$ [2]:

$$DN = \frac{d\rho}{d\lambda} = \frac{B_n - B_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}, \quad (2)$$

где B_n и λ_n соответственно значения отражательной способности и длины волны в канале изображения; n — это номер канала.

В случае использования снимков со спутника Landsat-8, выбирались значения производных и отражения по шести каналам (Red, Green, Blue, NIR, SWIR1, SWIR2). Таким образом получили массив из 11 переменных (шесть переменных по значениям отражения и пять — по значениям производной (2)). Благодаря информации, предоставленной ЕФИС ЗНС, автору удалось создать карту сельскохозяйственных полей, разделенных определенным цветом, в соответствии с типом сельскохозяйственных полей. В качестве валидационной и тестовой выборки были взяты случайным образом участки на самом исследуемом районе. Классификацию изображений с КА проводили с использованием метода «дерево принятия решений».

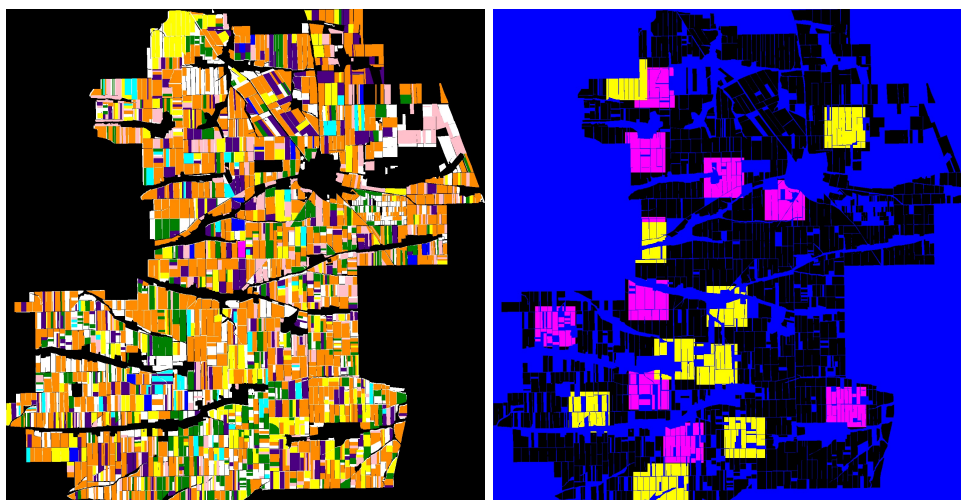


Рис. 2. а) Схема сельскохозяйственных угодий. б) Схема расположения участков, являющихся основой для валидационной и тестовой выборки

В качестве алгоритма для построения дерева использовался алгоритм RandomForestClassifier. Критерием разделения выборки на две группы выступал критерий Gini, который является дефолтным:

$$Gini = N - \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^{\infty} l_i^2 + \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{\infty} r_i^2 \right) \rightarrow \min, \quad (3)$$

где N — общий объем выборки; L и R соответственно число объектов левой и правой ветки дерева; l_i и r_i соответственно число представителей i -го класса по левой и правой ветки дерева.

По результатам работы была проведена классификация сельскохозяйственных культур на территории юго-запада Ростовской области по снимкам со спутника Landsat-8. Результаты классификации оказались достоверными, что подтверждается полевыми исследованиями. Они отражены в матрице ошибок классификации:

Класс	231	39	363	243	211	122
231	6277	694	1667	925	469	1660
39	4662	3471	656	547	184	1343
363	2382	258	2105	3596	846	664
243	1423	219	2475	43064	2075	1363
211	1314	73	1250	1258	13675	1338
122	2391	463	462	594	683	7763

Метод не зависит от различных параметров распределения значений яркости пикселей, что может давать хорошие результаты, когда нет закономерностей распределения признаков сельскохозяйственных культур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Книжников Ю. Ф., Кравцова В. И., Тутубалина О. В. Аэрокосмические методы географических исследований. М.: Академия, 2004, 336 с.
2. Чурсин И. Н., Филиппов Д. В. Распознавание сельскохозяйственных культур по мультиспектральным космическим снимкам высокого разрешения. — Геоинформатика. Технологии дистанционного зондирования и мониторинга, 2018, с. 22–27.

Н. А. Соколов, Е. Ю. Хрусталеv (Москва, ЦЭМИ РАН). **Единая система планирования в механизме экономического обеспечения военного строительства.**

В современном механизме экономического обеспечения военного строительства (ЭОВС) значение планирования как видов управленческой деятельности и разнообразных планов, так и их результатов чрезвычайно высоко, поскольку планы не просто существуют, а играют весьма важную роль [1]. В настоящее время силу закона и обязательность выполнения имеет бюджет, а планы превратились во вспомогательный инструмент при разработке федерального (военного) бюджета. Поэтому целесообразно кратко проанализировать Бюджетный кодекс (БК), который определяет бюджетную систему и бюджетный процесс в РФ.

Одними из основных принципов бюджетной системы РФ являются принципы эффективности и экономности использования, а также адресности и целевого характера бюджетных средств. Из этих принципов следует законодательно установленная необходимость целевого планирования расходов федерального бюджета на военные нужды государства. Однако большое количество разрозненных планов и программ, отражающих разнообразие целей и многоаспектность военного строительства, законодательно пока никак не связано с бюджетным процессом. И это, как показывает практика, негативно сказывается на управлении военным строительством. Следует подчеркнуть, что в последние годы особое внимание стало уделяться проблемам создания и распространения изделий двойного применения [2], создание и производство которых требует реализации наукоемких и, как правило, очень рискованных инновационных проектов [3, 4].

Полезно отметить, что в США и многих других государствах планирование является не самостоятельным видом управленческой деятельности, а первой, начальной стадией единой системы управленческих действий, завершающихся ежегодной разработкой и принятием бюджета с последующим его исполнением и отчетностью: как об исполнении бюджета, так и о решении поставленных задач.

В российском БК финансовое планирование отражено достаточно подробно. Предусмотрена разработка и ежегодная корректировка перспективного финансового плана (*ПФП*) с глубиной планирования на 3 года.

Для дальнейшего исследования целесообразна некоторая формализация. Обозначив текущий год номером T , можно формализованно записать, что в перспективный план входят укрупненные финансовые показатели (соответствующие бюджетной классификации и обозначаемые далее как Φ_n) предстоящего $(T+1)$ -го года, на который разрабатывается бюджет, и еще двух лет среднесрочной перспективы: $(T+2)$ -го и $(T+3)$ -го годов, т. е. *ПФП* (T), составляемый в T -м году, является упорядоченной совокупностью финансовых показателей трех предстоящих лет

$$\text{ПФП}(T) = \{ \Phi_n[(T+1), T], \Phi_n[(T+2), T], \Phi_n[(T+3), T] \},$$

естественным образом связанных с федеральным бюджетом текущего года $\Phi_B(T)$, фактическим исполнением бюджета $ИБ(T)$ и косвенно — с другими исходными данными, используемыми для составления бюджета на $(T+1)$ -й год.

Время (порядковый номер года) как аргумент функции Φ_n указывается в скобках дважды для того, чтобы передать ее зависимость от года, на который разрабатывается план, и еще от года разработки. Например, выражение $\Phi_n[(T+2), T]$ означает, что имеется в виду совокупность значений показателей Φ_n на $(T+2)$ -й год, запланированная в T -м году. Конкретизируем пример: запись $\Phi_n[2018, 2017]$ означает укрупненные финансовые показатели на 2018 год, разработанные в 2017 году.

Это обстоятельство важно отмечать потому, что в предшествующем $(T-1)$ -м году эти же по составу показатели на этот же $(T+2)$ -й год могли иметь иные количественные значения $\Phi_n[(T+2), (T-1)]$, а в будущем $(T+1)$ -м году, возможно, опять изменятся и будут иметь значения $\Phi_n[(T+2), (T+1)]$.

Таким образом, в течение ряда лет, рассматриваемые в рамках бюджетного процесса финансовые показатели каждого года претерпят несколько преобразований: сначала как показатели третьего года в списке предстоящих трех лет перспективного финансового плана, затем второго года в таком же списке, еще через год — первого, потом как показатели исполняемого бюджета и, наконец, станут отчетными финансовыми показателями бюджета, исполненного в прошедшем году.

При рассмотрении такого рода показателей на более долгую перспективу, что характерно для программно-целевого планирования, их жизненный цикл естественно удлинится. При этом планы должны предусматривать прогрессивное развитие наукоемких производств и обеспечивать их экономическую безопасность [5, 6].

Однако вопрос о том, как быть, если ранее утвержденные программы и планы не соответствуют финансово-экономическим возможностям страны, оставлен в БК без ответа. В США и ряде других западных стран система «планирование — программирование — разработка бюджета» этой проблемы нет по той простой причине, что планы не утверждаются и подлежат ежегодному пересмотру хотя бы для того, чтобы убедиться, что, например, ничего в них менять не надо.

В наших условиях остается только одна возможность: исходить из понятий об иерархии документов. Федеральный бюджет имеет ранг закона, что ставит его на заведомо более высокую ступень, чем любые планы и программы, кем бы они ни были утверждены. Они должны и могут использоваться при формировании бюджета, но не в качестве обязательных для исполнения. Вышеизложенное позволяет сформулировать цель и задачи единой системы планирования военного строительства и развития военной организации.

Цель создания и дальнейшего совершенствования единой системы планирования в рамках механизма ЭОВС состоит в безусловном выполнении принципа эффективности и экономности использования всех ресурсов и средств, выделяемых на оборону, включая бюджетные ассигнования, т. е. в достижении требуемых результатов военного строительства и развития вооруженных сил РФ с использованием наименьшего объема средств или достижения наилучшего результата с использованием определенного бюджетом объема средств.

Для достижения указанной выше цели и следования ей в дальнейшем необходимо решить, в частности, такие задачи:

- 1) разработать и ввести в практику военного строительства ежегодно уточняемую систему среднесрочных и долгосрочных программ (по отдельным аспектам военного строительства) и годовых расшифровок (планов) рационального расходования средств, выделяемых на осуществление этих программ;
- 2) разработать обязательную процедуру согласования фрагментов долгосрочных программ военной организации, охватывающих первые три предстоящих года, с перспективным финансовым планом на эти же годы и соответствующую результатам согласования корректировку программ;
- 3) разработать и внедрить процедуру обязательной экспертной оценки каждой новой программы и корректировок ранее разработанных программ финансовыми органами и (выборочно) аппаратом Совета безопасности;
- 4) разработать и внедрить правила (алгоритмы для автоматизированных систем) однозначного перехода (пересчета) от программно-целевой структуры распределения ресурсов к бюджетной и обратно по всем позициям бюджетной классификации РФ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 18-00-00177 (18-00-00164).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хрусталева Е. Ю., Цымбал В. И. О механизме экономического обеспечения военного строительства. — Экономика и математические методы, 2001, т. 37, № 2, с. 44–53.
2. Хрусталева Е. Ю., Соколов Н. А. Распространение технологий и изделий двойного применения с помощью механизмов оборонно-гражданской интеграции. — Аудит и финансовый анализ, 2016, № 3, с. 406–411.
3. Хрусталева Е. Ю. Финансово-экономическая значимость и рисковость наукоемких инновационных проектов. — Финансовая аналитика: проблемы и решения, 2013, № 8, с. 2–11.
4. Хрусталева Е. Ю., Соколов Н. А., Хрусталева О. Е. Концепция оценки и управления риском при реализации инновационных проектов создания интеллектуальной продукции. — Экономический анализ: теория и практика, 2013, № 44, с. 2–13.
5. Бендикова М. А., Хрусталева Е. Ю. Экономическая безопасность наукоемких производств. — Вопросы экономики, 1999, № 9, с. 119–125.
6. Куркин И. Л., Тихонов И. П., Хрусталева О. Е. Концептуальные основы формирования перспективных стратегий инновационного развития высокотехнологичных комплексов. — Национальные интересы: приоритеты и безопасность, 2013, № 16, с. 19–24.

А. Н. Тырсин (Екатеринбург, УрФУ). Вероятностно-энтропийная концепция устойчивого развития сложных систем.

В настоящее время одним из актуальных вопросов стала проблема устойчивого развития. Однако многие авторы указывают на концептуальную сложность, которая заключается в том что, понятие «устойчивое развитие» включает в себя два термина «устойчивость» и «развитие». При этом каждый из этих терминов трактуется не однозначно. Это приводит к появлению разных трактовок устойчивого развития применительно к конкретным системам. Например, в [1] насчитано более 50 различных интерпретаций понятия «устойчивое развитие». Поэтому, представляется актуальной проблемой формулирование некоторой общей концепции устойчивого развития, которую можно конкретизировать для конкретных случаев. Укажем на один из возможных путей решения, основанного на использовании системного подхода.

К основным особенностям сложных стохастических систем можно отнести: 1) многомерность; 2) взаимосвязанность компонент; 3) стохастический характер поведения; 4) многокритериальность; 5) разнонаправленность поведения элементов. С учетом этих особенностей представим систему в виде случайного вектора, каждая компонента которого является одномерной случайной величиной, характеризующей функционирование соответствующего элемента системы.

Поскольку «развитие» и «устойчивость» характеризуют различные стороны функционирования сложных систем [2, 3], то будем решать следующие задачи:

1°. Выработка интегрального показателя характеризующего эффективное функционирование системы.

2°. Обеспечение безопасного функционирования системы. Здесь в контексте устойчивого развития заменяем термин «устойчивость» на «безопасность».

3°. Формирование критерия, характеризующего устойчивое развитие в смысле решения первых двух задач.

Гипотеза: Под устойчивым развитием сложной системы будем понимать динамику, состоящую в наличии тенденции сбалансированного изменения векторной энтропии при сохранении приемлемого уровня риска.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №17-01-00315а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Старикова Е. А.* Современные подходы к трактовке концепции устойчивого развития. — Вестник Российского ун-та дружбы народов. Серия: Экономика, 2017, т. 25, № 1, с. 7–17.
2. *Tyrsin A. N., Gevorgyan G. G.* Modeling of Sustainable Development of Megacities. In: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2017, v. 72, 9 p. doi: 10.1088/1755-1315/72/1/012010.
3. *Tyrsin A. N., Surina A. A.* Monitoring of Risk of Multidimensional Stochastic System as Tools for a Research of Sustainable Development of Regions. In: IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2018, v. 177, 8 p. doi: 10.1088/1755-1315/177/1/012005.

Г. Ж. К. Уанкпо¹, **Д. В. Козырев**^{1,2}, **И. А. Гудкова**^{1,3} (Москва, ¹ РУДН, ² ИПУ РАН, ³ ФИЦ ИУ РАН). **Модель надежности однородной системы передачи данных горячего резервирования с произвольным распределением времени ремонта элементов.**

Постановка задачи. Рассматривается модель $\langle M_N | GI | 1 \rangle$ восстанавливаемой системы горячего резервирования с одним ремонтным устройством, с произвольной функцией распределения (ФР) $B(x)$ и соответствующей плотностью распределения (ПР) $b(x)$ времени ремонта ее элементов, и показательным распределением времени безотказной работы элементов с параметром $\lambda_i = (N-i)\alpha$, $i = 0, 1, \dots, N$. Ставится задача получения явных аналитических выражений для стационарного распределения вероятностей состояний системы и для стационарной вероятности отказа системы.

Решение. Рассмотрим случайный процесс $v(t)$ — число отказавших элементов в момент времени t . Множество состояний процесса $E = \{0, 1, 2, \dots, N\}$.

Для описания поведения системы с помощью марковского процесса, введем дополнительную переменную $x(t) \in \mathbb{R}_+$ — время, затраченное в момент t на ремонт отказавшего элемента. Получим двумерный процесс $(v(t), x(t))$ с расширенным пространством состояний $\varepsilon = \{(0), (1, x), (2, x), \dots, (N, x)\}$.

Обозначим $p_0(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии $i = 0$, $p_i(t, x)$ — плотность распределения (по непрерывной компоненте) вероятностей того, что в момент времени t система находится в состоянии i ($i = \overline{1, N}$), и время, затраченное на ремонт отказавшего элемента, находится в интервале $(x, x + dx)$.

$$p_{0,0}(t) = p\{v(t) = 0\},$$

$$p_i(t, x) dx = p\{v(t) = i, x < x(t) < x + dx\}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

С помощью формулы полной вероятности перейдем к выводу системы уравнений Колмогорова, а предельным переходом при $\Delta \rightarrow 0$ и в предположении, что процесс имеет стационарное распределение при $t \rightarrow \infty$, получаем систему уравнений баланса в виде:

$$\begin{cases} \lambda_0 p_0 = \int_0^\infty p_1(x) \delta(x) dx \\ \frac{\partial p_1(x)}{\partial x} = -(\lambda_1 + \delta(x)) p_1(x) \\ \frac{\partial p_i(x)}{\partial x} = -(\lambda_i + \delta(x)) p_i(x) + \lambda_{i-1} p_{i-1}(x), i = \overline{2, N-1} \\ \frac{\partial p_N(x)}{\partial x} = -\delta(x) p_N(x) + \lambda_{N-1} p_{N-1}(x) \end{cases}$$

где

$$\delta(x) = \frac{b(x)}{1 - B(x)}$$

есть условная ПР остаточной длительности ремонта элемента, находящегося в ремонте время t . Граничное условие:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= \lambda_0 p_0(x) + \int_0^\infty p_2(x) \delta(x) dx, \\ p_i(0) &= \int_0^\infty p_{i+1}(x) \delta(x) dx, \quad i = \overline{2, N-1}. \end{aligned}$$

Решая полученную систему, используя метод вариации постоянной, получаем стационарные вероятности состояний системы горячего резервирования:

$$\begin{aligned} p_0 &= C_1 \frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0}, \\ p_1 &= C_1 \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1}, \\ p_i &= C_1 \left(A_i \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} A_j \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_j - \lambda_{k+1}} \right) \\ &\quad \text{при } i = \overline{2, N-1}, N \geq 3, \\ p_N &= \begin{cases} C_1 \left(A_N b - A_{N-1} \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{N-1})}{\lambda_{N-1}} \right) & \text{при } N=2, \\ C_1 \left(A_N b - A_{N-1} \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_{N-1})}{\lambda_{N-1}} + \sum_{j=1}^{N-2} (-1)^{N-j} A_j \frac{1 - \tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \prod_{k=j}^{N-2} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_j - \lambda_{k+1}} \right) & \text{при } N \geq 3, \end{cases} \end{aligned}$$

где

$$C_1 = \begin{cases} \left[\frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0} + \frac{1-\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1} + A_N b - A_{N-1} \frac{1-\tilde{b}(\lambda_{N-1})}{\lambda_{N-1}} \right]^{-1} & \text{при } N=2, \\ \left[\frac{\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_0} + \frac{1-\tilde{b}(\lambda_1)}{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{N-1} \left(A_i \frac{1-\tilde{b}(\lambda_i)}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} A_j \frac{1-\tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_j - \lambda_{k+1}} \right) + \left(A_N b - A_{N-1} \frac{1-\tilde{b}(\lambda_{N-1})}{\lambda_{N-1}} + \sum_{j=1}^{N-2} (-1)^{N-j} A_j \frac{1-\tilde{b}(\lambda_j)}{\lambda_j} \prod_{k=j}^{N-2} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_j - \lambda_{k+1}} \right) \right]^{-1} & \text{при } N \geq 3, \end{cases}$$

$$A_2 = \begin{cases} A_1 & \text{при } N=2, \\ \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \tilde{b}(\lambda_1) \right) \frac{1}{\tilde{b}(\lambda_2)} & \text{при } N \geq 3, \end{cases}$$

$$A_{i+1} = \left(A_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} A_j \prod_{k=j}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_j - \lambda_{k+1}} - \sum_{j=1}^i (-1)^{i+1-j} A_j \tilde{b}(\lambda_j) \prod_{k=j}^i \frac{\lambda_k}{\lambda_j - \lambda_{k+1}} \right) \frac{1}{\tilde{b}(\lambda_{i+1})}, \quad i = \overline{2, N-2}, \quad N \geq 4;$$

$$A_n = A_{N-1} (1 + \tilde{b}(\lambda_{N-1})) + \sum_{j=1}^{N-2} (-1)^{N-1-j} \prod_{k=j}^{N-2} A_j \frac{\lambda_k}{(\lambda_j - \lambda_{k+1})} - \sum_{j=1}^{N-2} (-1)^{N-j} A_j \tilde{b}(\lambda_j) \prod_{k=j}^{N-2} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_j - \lambda_{k+1}}, \quad N \geq 3,$$

где b — математическое ожидание случайной величины времени ремонта отказавшего элемента.

Очевидно, что имеется зависимость стационарных вероятностей состояний системы от вида распределений времени ремонта, но она становится исчезающе малой при «быстром» ремонте отказавших элементов. В докладе приводятся численные и графические результаты, которые подтверждают вывод об асимптотической нечувствительности стационарной надежности системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-07-00142).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rykov V. V., Kozyrev D. V.* Analysis of renewable reliability systems by Markovization method. — Lecture Notes in Computer Science, volume 10684. Springer, Cham, p. 210–220, 2017.
2. *Уаикпо Г. Ж. К., Козырев Д. В.* Аналитическое и имитационное моделирование надежности замкнутой однородной системы с произвольным числом источников данных и ограниченными ресурсами для их обработки. — Современные информационные технологии и ИТ-образование, 2018, т. 14, № 3, с. 548–555.

А. А. Фисак (Москва, ВМК МГУ). **Об оптимальных размещениях станций обслуживания на отрезке вещественной прямой.**

При решении задачи оптимального размещения станций обслуживания ключевую роль играет критерий, используемый для оценки оптимальности. В задачах размещения на отрезках прямой линии, где координата вызова определяется случайной величиной ξ с плотностью распределения ρ , принято минимизировать значение $\mathbf{M} \min_{1 \leq i \leq n} |\xi - x_i|^s$ (здесь s — положительный параметр). Оказывается, что точное решение задачи минимизации такого критерия возможно только в самых простых моделях, что приводит к необходимости перехода к менее точным, но достижимым результатам.

В данной работе приведены решения точной задачи оптимального размещения станций обслуживания на отрезке для двух случаев: размещения произвольного числа станций в случае постоянной плотности распределения вызовов, а также размещения двух станций в случае линейной плотности распределения вызовов; приведено и доказано необходимое условие оптимального размещения:

$$\int_{d_i}^{x_i^*} \rho(u)(x_i^* - u)^{s-1} du = \int_{x_i^*}^{d_{i+1}} \rho(u)(u - x_i^*)^{s-1} du, \quad i = 1, \dots, n,$$

где x_i^* — координаты станций обслуживания, d_1 и d_{n+1} — левая и правая границы основного отрезка соответственно,

$$d_{i+1} = \frac{x_i^* + x_{i+1}^*}{2}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

С помощью этого необходимого условия приводится алгоритм размещения станций обслуживания, являющийся наиболее эффективным из полученных на сегодняшний день — асимптотически оптимальным второго порядка, то есть удовлетворяющим условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(x) - \varphi(x^*))n^{s+1} = 0.$$

Здесь x — это вектор предложенных координат для n станций обслуживания, а x^* — это вектор неизвестных координат оптимально размещенных станций. Предложенный отступ от оптимального значения быстро сокращается по мере роста числа станций и является успешно применимым на практике, и кроме того, благодаря выбору параметра s модель становится более гибкой.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-07-00252).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захарова Т. В., Фисак А. А. Об оптимальных размещениях станций обслуживания. — Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика, 2018, в. 2, с. 40–47.
2. Fisak A. A., Zakharova T. V. Asymptotically optimal service station arrangements for a parametric family of criteria. — J. Math. Sci., 2019, v. 237, № 6, p. 766–774.

Ю. П. Шумилов (Москва, АО «НПК «СПП»). **Методика обнаружения спектров слабых источников излучения.**

При наблюдении космических аппаратов (КА) важным источником информации является спектр отраженного и собственного излучения КА, а также спектры окружающей его среды. Задача обнаружения спектров [1] характеризуется той особенностью, что обнаруживаться они должны по всей информативной спектральной протяженности (ИСП) одновременно, каждая часть которой, может иметь различную энергетику. ИСП определяется априорным эталоном (априорной информацией), которая используется потом при принятии решения об обнаружении, для сравнения и отождествления, с каким либо конкретным спектром покрытия, среды и т. д. Для решения задачи требуется высокое разрешение, порядка 0,1 нм. Такое разрешение может быть реализовано в спектрометре скрещенной дисперсии [2] с многоэлементным матричным приемником.

Рассмотрим методику для видимой области спектра, где эталоном сравнения является спектр Солнца, который искажается при отражении излучения от КА и его прохождении через различные рассеивающие среды и служит информативной составляющей для сравнения. Задача ставится таким образом. Оценить вероятность правильного одновременного обнаружения ИСП анализируемого покрытия, среды и уровень необходимого сигнала.

Методика формулируется так.

1. Задается библиотека спектров отражения и поглощения интересующих покрытий и сред.

2. Определяется необходимая ИСП этих спектров, в том числе из условия их полного отражения (регистрации) на матричном приемнике. 3. Определяются характеристики фоноцелевой обстановки (сигналы, фоны, шумы (сш), параметры расположения объектов анализа).

4. Определяются пороговые характеристики каждой составляющей ИСП (т. е. для каждого элемента матрицы) [3]:

$$h_{Di=N_{icш} \sqrt{\frac{N_i}{2}} \ln(2(1-D))}, (1)$$

N_i — количество кадров в i -й линии ИСП покрытия, среды, $\sigma_{icш}$ — среднее количество сш фотоэлектронов в i -й линии ИПС покрытия, среды, $\sigma_{icш}$ — среднеквадратическое отклонение среднего количества сш фотоэлектронов в i -й линии покрытия, среды, D — вероятность правильного обнаружения. Эта вероятность, как правило, принимается одинаковой для всех i , $D \approx 0,95$.

5. Определяется, вероятность одновременного правильного обнаружения во всех (пусть $i = 1, 2, \dots, m$) элементах ИСП, которая будет равна:

6. Определяется количество кадров N необходимых для реализации $Dm_N \geq 0,95$.

В формуле (1) заложено накопление. Оно будет различно для каждой линии ИСП — с учетом своего сигнала и фона в каждой линии — N_i и выбирается $N_i \max = N$, которое и будет характеризовать результативную работу спектрометра при обнаружении спектров.

7. Далее идет сравнение с библиотекой и принятие решения об идентификации спектров покрытий и сред.

Разработанная методика позволяет с необходимой достоверностью судить о характере функционирования и изменений КА и позволяет оценить потенциальные возможности спектрометра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мибери Дж.* Обнаружение и спектрометрия слабых источников света. Пер. с англ., М.: Мир, 1979, 304 с.
2. *Yu. Bazanov at al.* Design two-dimensional (crossed) grating calculation in Czerny-Turner spectrometer with usage of freeform mirrors. SPIE Optics +Photonics 2017. Vol.10375 103750V, p. 1–6.
3. *Бакут П. А., Выгон В. Г., Шаргородский В. Д., Шумилов Ю. П.* Статистический синтез оптимального алгоритма обнаружения космических объектов при наблюдении в оптическом диапазоне. — Радиотехника и электроника, 2009, т. 54, № 8, с. 794–985.