М. М. Мусин (Москва, МГУ). **Оценка каплинга случайного графа преимущественного присоединения и графа Эрдеша–Реньи.**

Область случайных графов последнее время активно исследуется благодаря возникновению множества прикладных задач, связанных со сложными неоднородными объектами, такими как различные структуры глобальной сети и всевозможные схемы социального взаимодействия. В этом контексте важными становятся модели, отражающие некие соображения приоритетности в процессе эволюции системы.

Граф преимущественного присоединения — это граф, получающийся индукционно следующим образом. Пусть имеется n построенных вершин, добавим вершину с номером $n+1$ и соединим ее ребром с одной из предыдущих вершин, причем вероятность выбрать вершину пропорциональна ее степени. Эту процедуру мы проведем независимо m раз (возможны кратные ребра, число m одно и то же на каждом шаге).

Прикладной интерес к модели преимущественного присоединения возник после работ [2], [3], где было высказано предположение, что данная модель должна хорошо описывать такие неоднородные структуры, как, например, интернет и социальные сети.

В работе [2] было статистически установлено, что интернет, рассмотренный как граф, вершины которого сайты или веб-страницы, а ребра — гиперссылки, имеет степенное распределение степеней вершин. В этой же работе было эвристически установлено, а позже в [4] строго доказано, что граф преимущественного присоединения имеет асимптотически степенное распределение степеней вершин. В дальнейшем граф преимущественного присоединения активно исследовался различными авторами (см., напр., [1, 5, 6, 8, 9]). Также следует отметить работы [7], [11], оперирующие с графами со степенным распределением вершин. Хороший обзор прикладного направления генерационных моделей можно найти в работе [10].

Нам удалось обобщить теорему 3.2 из [5], где осуществляется каплинг графа преимущественного присоединения с классическим графом Эрдеша-Реньи.

Определение 1 ([5]). Пусть m — натуральное число. Для $m=1$ зададим граф преимущественного присоединения G_m^n по индукции. Для $n=1$ пусть G_1^1 состоит из одной вершины и 1 петли. Граф G_1^n получается из графа G_1^{n-1} добавлением вершины номер n и ребра между ней и вершиной со случайным номером t_n, имеющим распределение

$$\mathbf{P}\{t_n=l\}=\begin{cases}\frac{d_l^n}{2n-1}, & 1\leqslant l\leqslant n-1,\\ \frac{1}{2n-1}, & l=n,\end{cases}$$

где d_l^n обозначает степень вершины номер l в графе G_1^{n-1}. Для $m>1$ пусть граф G_m^n получается из графа G_1^{mn} отождествлением вершин с номерами $1,\dots,m$ в вершину 1 графа G_m^n, вершин $m+1,\dots,2m$ в вершину 2 и т. д.

Определение 2. Графом Эрдеша-Реньи $G(n,p)$ называется граф, состоящий из n вершин, в котором ребра между любыми двумя вершинами присутствуют с вероятностью p независимо друг от друга.

Нами установлено следующее утверждение. Пусть $0<\eta<1/2$, $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ – такая последовательность натуральных чисел, что $m_n\leqslant n$ для всех $n\in\mathbf{N}$.

Теорема. *Пусть n — натуральное число. Рассмотрим графы $G_1:=G_{m_n}^n$ и $G_2:=G(n,\eta\frac{m_n}{n})$ с общим множеством вершин $\{1,\dots,n\}$. Пусть случайная величина E_n обозначает число ребер графа G_2, которые не присутствуют в графе G_1. Тогда можно задать G_1 и G_2 на одном и том же вероятностном пространстве таким образом, чтобы*

$$\mathbf{P}\left\{E_n\geqslant C(n-m_n)e^{-cm_n}+cm_n^3(\log n-\log m_n)+B_n\right\}\leqslant n(m_n^5+Cm_ne^{-cm_n})/B_n^{-2},$$

где C и c не зависят от значений n и последовательности m_n, $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ — произвольная последовательность положительных чисел.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект № 07–01–00373-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Athreya K. B.*, *Ghosh A. P.*, *Sethuraman S.* Growth of preferential attachment random graphs via continuous time branching processes, 2007 (arxive: math/0701649v1).
2. *Barabasi A.-L.*, *Albert R.* Emergence of scaling in random networks. — Science, 1999, v. 286, p. 509–512.
3. *Barabasi A.-L.*, *Albert R.*, *Jeong H.*, *Bianconi G.* Power-Law Distribution of the World Wide Web. — Science, 2000, v. 287, p. 2115.
4. *Bollobas B.*, *Riordan O.*, *Spencer J.*, *Tusnady G.* The Degree Sequence of a Scale-Free Random Graph Process. — Random Struct. Algor., 2001, v. 18 (3), p. 279–290.
5. *Bollobas B.*, *Riordan O.* Coupling of Scale-Free and Classical Random Graphs. — Intenet Math., 2003, v. 1 (2), p. 215–225.
6. *Bollobas B.*, *Riordan O.* The Diameter of a Scale-Free Random Graph. — Combinatorica, 2004, v. 24 (1), p. 5–34.
7. *Cooper C.*, *Frieze A.* A General Model of Web Graphs. — Random Struct. Algor., 2003, v. 22, p. 311–335.
8. *Deijfen M.*, *van der Esker H.*, *van der Hofstad R.* A Preferential Attachment Model with Random Initial Degrees. — To appear in Arkför Matematik (2008).
9. *vanderHofstad R.*, *Hooghiemstra G.* Diameters of preferential attachment models. — To appear in Ann. App. Probab. (2008).
10. *Mitzenmacher M.* A Brief History of Generative Models for Power Law and Lognormal Distributions. — Inernet Math., 2003, v. 1 (2), p. 226–251.
11. *Newman M. E. J.*, *Strogatz S. H.*, *Watts D. J.* Random Graphs with Arbitrary Degree Distributions and Their Applications. — Phys. Rev. 2001, E 64, 026118.