Н. К. Б а к и р о в (Уфа, ИМ УНЦ РАН). **Новый коэффициент корреляции.**

Пусть (X_k, Y_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — повторная выборка из генеральной совокупности (X, Y), $X_k \in \mathbf{R}^p$, $Y_k \in \mathbf{R}^q$. Пусть $\mathbf{E}\,|X|_p^2, \mathbf{E}\,|Y|_q^2 < \infty$, где $|\cdot|_p$, $|\cdot|_q$ — евклидовы нормы и $X \not\equiv \mathrm{const}$, $Y \not\equiv \mathrm{const}$. Обозначим

$$A_{k,l} = |X_k - X_l|_p - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|X_k - X_l|_p - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}|X_k - X_l|_p + \frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n}|X_k - X_l|_p,$$

$$B_{k,l} = |Y_k - Y_l|_q - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|Y_k - Y_l|_q - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}|Y_k - Y_l|_q + \frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n}|Y_k - Y_l|_q.$$

Определим «скалярную выборочную ковариацию» между случайными векторами X и Y как

$$\widehat{\mathrm{Cov}}_W(X, Y) = \left(\frac{1}{n^2}\sum_{k,l=1}^{n} A_{k,l}B_{k,l}\right)^{1/2}$$

и определим «новый выборочный коэффициент корреляции» формулой

$$\widehat{\mathrm{Cor}}_W(X, Y) = \frac{\widehat{\mathrm{Cov}}_W(X, Y)}{\sqrt{\widehat{\mathrm{Cov}}_W(X, X)}\sqrt{\widehat{\mathrm{Cov}}_W(Y, Y)}}.$$

Обозначим $\mathrm{Cor}_W(X, Y) = P - \lim_{n\to\infty}\widehat{\mathrm{Cor}}_W(X, Y)$. Нетрудно видеть, что коэффициенты $\mathrm{Cor}_W(X, Y)$, $\widehat{\mathrm{Cor}}_W(X, Y)$ инвариантны к линейным преобразованиям вида $X \mapsto a + bCX$, $Y \mapsto a_1 + b_1C_1Y$, где a, a_1 — неслучайные веторы, b, b_1 — неслучайные ненулевые числа, C, C_1 — неслучайные ортогональные матрицы. Перечислим некоторые полезные свойства введенного коэффициента:

1) $\mathrm{Cor}_W(X, Y) = 0 \iff$ сл. в. X, Y независимы;

2) $0 \leqslant \widehat{\mathrm{Cor}}_W(X, Y), \mathrm{Cor}_W(X, Y) \leqslant 1$;

3) пусть для определенности $p = q$, т. е. данные X, Y имеют одинаковую размерность, тогда $\widehat{\mathrm{Cor}}_W(X, Y) = 1$ (или $\mathrm{Cor}_W(X, Y) = 1$) $\iff Y = a + bCX$ для некоторых неслучайных вектора a, ненулевого числа b, ортогональной матрицы C;

4) пусть $p = q = 1$ и сл.в. X, Y биномиальны (принимают одно из двух значений), тогда $\mathrm{Cor}_W(X, Y) = |r_{X,Y}|$, $\widehat{\mathrm{Cor}}_W(X, Y) = |r^n_{X,Y}|$, где $r_{X,Y}$ — классический коэффициент корреляции между сл. в. X, Y и $r^n_{X,Y}$ — соответствующий классический выборочный коэффициент корреляции.

В докладе рассматриваются также задача проверки гипотезы о независимости случайных векторов X, Y, ЦПТ для слабозависимых слагаемых и другие вопросы в связи с новым коэффициентом корреляции.