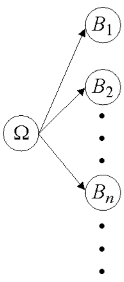
И. В. П а в л о в, Э. А. П и л о с я н (Ростов-на-Дону, РГСУ, РГУПС). **Сведение процедуры хеджирования в одношаговой модели (B,S)-рынка со счетным числом состояний к хеджированию на интерполирующем рынке с бесконечным горизонтом.**

Рассмотрим одношаговую модель (B,S)-рынка, где торгуются акции одного типа, а одношаговая фильтрация порождается деревом, представленным на рисунке.



Таким образом, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \sigma\{B_1, B_2, \dots\}$.

Рассмотрим адаптированный процесс $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, который можно интерпретировать как дисконтированную стоимость торгуемой акции. Обозначим $Z_0 = a$ и $Z_1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k I_{b_k}$. Снабдим этот рынок множеством вероятностных мер $\mathcal{P}$, нагружающих все атомы $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$ Предположим, что выполняется условие

$$\inf_{1\leqslant i<\infty} b_i < a < \sup_{1\leqslant i<\infty} b_i, \tag{1}$$

влекущее за собой безарбитражность рассматриваемого рынка. В [1] доказана следующая теорема.

Теорема. *Если выполняется* (1), *то любая мартингальная мера $P \in \mathcal{P}$ удовлетворяет усиленному свойству хааровской единственности.*

В работе, представленной данным сообщением, данная теорема применяется к хеджированию различных платежных обязательств, в частности, произвольных ограниченных платежных обязательств.

Пусть для фиксированной мартингальной меры $P \in \mathcal{P}$ процесса $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^1$, удовлетворяющего условиям теоремы, построена такая специальная интерполирующая хааровская фильтрация $\mathbf{H} = (\mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$, что для соответствующего интерполирующего процесса $Y = (Y_n, \mathcal{H}_n)_{n=0}^{\infty}$ мера P является единственной мартингальной мерой. Изменив, если нужно, индексацию событий B_n, можно считать, что $\mathcal{H}_n = \sigma(B_1, B_2, \dots, B_n, G_n)$, где $G_n = \Omega \setminus (\cup_{k=1}^n B_k)$ $n = 0, 1, 2, \dots$, а Y_n можно представить в виде: $Y_n = \sum_{k=1}^n b_n^k I_{B_k} + g_n I_{G_n}$.

Обозначим $G_\infty = \Omega \setminus (\cup_{k=1}^\infty B_k) = \cap_{n=1}^\infty G_n$, а также $p_k = P(B_k)$, $q_n = P(G_n)$.

Возможны два случая: 1) $G_\infty \neq \varnothing$ и при этом $p_\infty := P(G_\infty) > 0$; 2) $G_\infty = \varnothing$. Рассмотрим сначала первый случай.

Пусть $f = \sum_{k=1}^\infty c_k I_{B_k} + c_\infty I_{G_\infty}$ — произвольное интегрируемое по мере P платежное обязательство (в частности, можно считать, что f — ограниченная с. в.). Следуя общей схеме построения совершенного хеджа в случае единственной мартингальной меры, имеем:

$$X_n := \mathbf{E}\,[f|\mathcal{F}_n] = \sum_{k=1}^n c_k I_{B_k} + \biggl(\sum_{k=n+1}^{\infty]} \frac{c_k p_k}{q_n}\biggr) I_{G_n},$$

где символ $\infty]$ в верхнем пределе суммы означает, что суммирование производится, включением индекса $+\infty$.

Построим такой самофинансируемый портфель $\pi = (\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, чтобы его полный капитал $X_n^{\pi} = \beta_n + \gamma_n Y_n$ совпал с X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Так как $(\beta_n)_{n=0}^{\infty}$ и $(\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$ — предсказуемые процессы, то

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_n^k I_{B_k} + \beta_n^n I_{G_{n-1}}, \quad \gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_n^k I_{B_k} + \gamma_n^n I_{G_{n-1}}.$$

Прямое вычисление дает

$$\gamma_n^n = \frac{1}{q_{n-1}} \sum_{k=n}^{\infty]} (c_n - c_k) p_k, \quad \beta_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k I_{B_k} + (c_n - \gamma_n^n b_n^n) I_{G_{n-1}}.$$

При этом $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_n^k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Совершенный хедж, удовлетворяющий этим последним соотношениям, называется *каноническим.*

Так как $X_n^{\pi} = X_n \to f$ P-п. н., то построенный портфель реплицирует заданное платежное обязательство f. Отсюда также вытекает соотношение $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \Delta Y_n = X_{\infty}^{\pi} - X_0$, которое является условием самофинансирования «на бесконечности».

Легко усмотреть, что в случае $G_{\infty} = \varnothing$ полученные формулы остаются верными, если из индексов суммирования исключить $+\infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пилосян Э. А.* Усиленное свойство хааровской единственности мартингальных мер. — В сб.: Математические методы в современных и классических моделях экономики и естествознания. Ростов-на-Дону: РГЭУ (РИНХ), 2008, с. 68–70.