

А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова (Ульяновск, УлГУ). Развитие прямого метода Ляпунова и равномерная асимптотическая устойчивость решений дискретных уравнений с изменяющейся структурой.

При исследовании разнообразных явлений окружающего мира во многих случаях адекватными математическими моделями являются различные типы уравнений с последствием. Один из важнейших классов таких уравнений образуют уравнения Вольтерра (УВ), в которых текущее состояние процесса зависит от всей предыстории. УВ в непрерывном времени посвящены многочисленные работы (см. [1]), где отмечается их прикладное значение. В последние годы выполнены исследования по теории устойчивости УВ и в дискретном времени. Устойчивость дискретных УВ вторым методом Ляпунова изучена в [2], где получены не только общие теоремы об устойчивости, но и исследован ряд примеров. Важность исследования дискретных УВ объясняется не только их самостоятельной прикладной и теоретической значимостью, но и возможностью использования дискретных аппроксимаций, т. к. до настоящего времени попытки применения метода функций Ляпунова к интегральным УВ оказались малоэффективными.

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается класс дискретных уравнений с изменяющейся структурой, введенный в [3], который содержит класс УВ. Для исследования устойчивости решений развивается метод функционалов Ляпунова на основе результатов [2]–[4].

Пусть $E_0, E_1, \dots$ — нормированные локально компактные пространства с нормами $\|\cdot\|_n$ и $f_n: E_n \rightarrow E_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Рассмотрим уравнение с изменяющейся структурой

$$x_{n+1} = f_n(x_n), \quad f_n(0) \equiv 0. \quad (1)$$

Если $x^0 \in E_{n_0}$, то последовательность $x^0, f_{n_0}(x^0), f_{n_0+1}(f_{n_0}(x^0)), \dots$ назовем *решением* (1) и обозначим $x_n(n_0, x^0)$, $n \geq n_0$. Пусть $\mathbf{F}$ — нормированное пространство над полем $\mathbf{R}$ с нормой $\|\cdot\|_F$ и последовательность отображений $p_n: E_n \rightarrow F$, $n = 0, 1, 2, \dots$

О п р е д е л е н и е. Нулевое решение $x_n \equiv 0$ уравнения (1) называется *p_n -устойчивым*, если для любых $n_0 \geq 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(n_0, \varepsilon) > 0$, что из $\|x^0\|_{n_0} < \delta$ следует $\|p_n(x_n(n_0, x^0))\|_F < \varepsilon$ при $n \geq n_0$. Если δ не зависит от n_0 , то решение *равномерно p_n -устойчиво*. Решение *равномерно асимптотически p_n -устойчиво*, если оно равномерно p_n -устойчиво и для некоторого $\Delta > 0$ и любых $n_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что из $\|x^0\|_{n_0} < \Delta$ следует $\|p_n(x_n(n_0, x^0))\|_F < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0 + N$.

В работе доказывается ряд теорем, содержащих достаточные условия равномерной асимптотической p_n -устойчивости нулевого решения уравнения (1) на основе развития результатов работ [3], [4] с использованием вырожденных функционалов Ляпунова, первая разность которых не обладает свойством отрицательной определенности.

Достаточные условия равномерной асимптотической p_n -устойчивости нулевого решения уравнения (1) представляют значительный практический интерес ввиду того, что (1) можно трактовать как некоторый вычислительный процесс с сохранением промежуточных результатов при постоянно действующих возмущениях. Реальный вычислительный процесс не может быть проведен в точном соответствии с (1), т. к. в вычислениях допускаются ошибки округления и значения получаются из неточных промежуточных результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 08–01–97010, 09–08–97004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D.* Applied theory of functional differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.
2. *Колмановский В. Б.* О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра. — Автоматика и телемеханика, 1995, № 11, с. 50–64.
3. *Гайшун И. В.* Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений. — Дифференциальные уравнения, 1997, т. 33, № 12, с. 1607–1614.
4. *Богданов А. Ю.* Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления. Ульяновск: «Венец» УлГТУ, 2008, 262 с.