О. В. З а х а р о в а (Уфа, УГАТУ). **Аналог формулы Даламбера для решения задачи Коши колебания бесконечной струны под действием случайной внешней силы.**

Рассмотрим задачу Коши колебания бесконечной струны под действием случайной внешней силы

$$\begin{aligned} &u''_{tt}(t,x) = u''_{xx}(t,x) + a(t,x,W(t)) + b(x,W(t))\,W'_t(t), \\ &u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(t,x)|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

где $a(t,x,v)$, $b(x,v)$ — детерминированные функции, гладкие по своим переменным, формальная производная винеровского процесса $W'_t(t)$ понимается в смысле Стратоновича, а само уравнение (1) — в интегральной форме. Задача Коши (1) в различных формах рассматривалась многими авторами, в частности, в работах [1], [2], исследовались вопросы существования решения, единственности, однако явных формул для решения задачи (1) предложено не было.

Решение задачи (1) ищем в виде $u(t,x) = \int_0^t \varphi(s,x,W(s))\,ds + u_0(x)$, при помощи метода, аналогичного описанному в работе [3], получаем два соотношения

$$\varphi'_v(t,x,v) = b(x,v), \quad \varphi'_s(s,x,v)|_{v=W(s)} = \int_0^s \varphi''_{xx}(\tau,x,W(\tau))\,d\tau + u''_0(x) + a(s,x,W(s)).$$

Первое легко интегрируется: $\varphi(t,x,W(t)) = \widetilde{b}(x,W(t)) - \widetilde{b}(x,W(0)) + \varphi(t,x,W(0))$, где $\widetilde{b}(x,v)$ — первообразная функции $b(x,v)$ по переменной v. Обозначим $c(t,x) = \varphi(t,x,W(0)) - \widetilde{b}(x,W(0))$, $\widetilde{c}(t,x) = \int_0^t c(s,x)\,ds$. Таким образом, $u(t,x) = \int_0^t \widetilde{b}(x,W(s))\,ds + \widetilde{c}(t,x) + u_0(x)$, следовательно, $\varphi(t,x,W(t)) = u'_t(t,x) = \widetilde{b}(x,W(t)) + \widetilde{c}'_t(t,x)$, откуда получаем $\widetilde{c}'_t(t,x)|_{t=0} = v_0(x) - \widetilde{b}(x,W(0))$. Вычислив частную производную $\varphi'_t(t,x,W(t))$, подставляя найденные выражения в уравнение (1), получаем задачу Коши для классического (не стохастического) волнового уравнения, а ее решение дает формула Даламбера. Таким образом, получаем решение задачи (1)

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(\xi)\,d\xi \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} a(\tau,\xi,W(\tau))\,d\xi\,d\tau + \int_0^t \widetilde{b}(s,x,W(s))\,ds \\ & - \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \widetilde{b}(0,\xi,W(0)\,d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \int_0^\tau \widetilde{b}''_{\xi\xi}(y,\xi,W(y))\,dy\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Orsingher E.* Randomly forced vibrations of a string. — Ann. Inst. H. Poinaré Probab. Statist., 1982, v. 18, № 4, p. 367–394.
2. *Peszat S.* SPDEs driven by a homogeneous Wiener process. — In: Stochastic Partial Differential Equations and Applications. N. Y.–Basel: Marsel Dekker, 2002, p. 417–429.
3. *Насыров Ф. С.* Симметричные интегралы и стохастический анализ. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 3, с. 496–517.