

С. А. Загребина, П. О. Пивоварова (Челябинск, ЮУрГУ, Магнитогорск, МаГУ). **Устойчивость решений уравнения Хоффа.**

Уравнение Хоффа [1]

$$\lambda u_t + u_{txx} = \alpha u + \beta u^3 \quad (1)$$

моделирует динамику выпучивания двутавровой балки. Параметры $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$ характеризуют свойства материала балки, а параметр $\lambda \in \mathbf{R}_+$ — продольную нагрузку на балку. Начально-краевые задачи для уравнения (1) первым начал изучать Н. А. Сидоров [2] со своими учениками [3], [4]. Они первыми обнаружили феномен принципиальной неразрешимости этих задач при произвольных начальных данных. В [5] было начато исследование множества допустимых начальных данных, понимаемое как фазовое пространство уравнения (1). В [6] было показано, что фазовым пространством уравнения (1) служит простое банахово C^∞ -многообразие.

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ . В области $\Omega \times \mathbf{R}$ рассмотрим задачу Коши–Дирихле

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbf{R} \quad (3)$$

для уравнения

$$\lambda u_t + \Delta u_t = \alpha u + \beta u^3. \quad (4)$$

Следуя [6], введем в рассмотрение следующие пространства: $\mathfrak{U} = \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $\mathfrak{F}$ — сопряженное к $\mathfrak{U}$ относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ из $L_2(\Omega)$, и операторы

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx, \quad \langle Mu, v \rangle = -\alpha \int_{\Omega} uv dx, \quad \langle N(u), v \rangle = -\beta \int_{\Omega} u^3 v dx.$$

Положив $L = A - \lambda$, мы редуцируем задачу (2)–(4) к задаче Коши

$$u(0) = 0 \quad (5)$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \quad (6)$$

Обозначим $\{\lambda_k\}$ спектр $\sigma(A)$ оператора A , занумерованный по неубыванию с учетом кратности, а $\{\varphi_k\}$ — соответствующее семейство собственных функций, ортонормальное относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Теорема 1 [6]. (i) Пусть $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{\lambda_k\}$, тогда при любых $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ фазовым пространством уравнения (6) служит все пространство $\mathfrak{U}$.

(ii) Пусть $\lambda \in \{\lambda_k\}$, тогда при любых $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ и таких $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, что $\alpha\beta \in \mathbf{R}_+$, фазовым пространством уравнения (6) служит простое банахово C^∞ -многообразие $\mathfrak{M}$, моделируемое подпространством $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U}: \langle u, \varphi_k \rangle = 0, \lambda = \lambda_k\}$.

Теорема 1 устанавливает существование единственного решения задачи (5), (6) $u \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathfrak{U})$ в случае (i), и $u \in C^\infty(\mathbf{R}; \mathfrak{M})$ в случае (ii). В дальнейшем решение $u = u(t)$ задачи (5), (6) будем обозначать следующим образом: $u = u(t, u_0)$.

О п р е д е л е н и е. Решение $u = u(t, 0) = 0$ уравнения (6) назовем *равномерно устойчивым*, если $u(t, u_0) \rightarrow 0$ при $u_0 \rightarrow 0$ равномерно по t , и *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и существует такая окрестность $\mathfrak{D}_0$ точки нуль, что $u(t, u_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $u_0 \in \mathfrak{D}_0$.

Теорема 2. (i) Пусть $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $\lambda \in [0, \lambda_1)$, тогда при любых таких $\alpha, \beta \in \{0\} \cup \mathbf{R}_+$, что $\alpha + \beta \in \mathbf{R}_+$, нулевое решение уравнения (6) равномерно асимптотически устойчиво.

(ii) Пусть $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ и $\lambda = \lambda_1$, тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$ нулевое решение равномерно устойчиво.

З а м е ч а н и е. Первое собственное значение λ_1 оператора A является предельной нагрузкой, при превышении которой балка утрачивает равномерную устойчивость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hoff N. J. Creep buckling. — Aeron. Quarterly, 1956, v. 7, № 1, p. 1–20.
2. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Иркутск: Изд-во ИрГУ, 1982.
3. Сидоров Н. А., Романова О. А. О применении некоторых результатов теории ветвлений при решении дифференциальных уравнений. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 9, с. 1516–1526.
4. Сидоров Н. А., Фалалеев М. В. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной. — Дифференц. уравнения, 1987, т. 23, № 4, с. 726–728.
5. Свиридюк Г. А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева. — Изв. РАН. сер. матем., 1993, т. 57, № 3, с. 192–207.
6. Свиридюк Г. А., Казак В. О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хопфа. — Матем. заметки, 2002, т. 71, № 2, с. 292–297.