И. А. Бадеха, П. В. Ролдугин (Москва, РГСУ, ТВП). **Графы без собственных ребер и с максимальной плотностью.**

Реберным покрытием кликами (РПК) графа G называется такой набор клик (полных подграфов) $K_1, \ldots, K_r$, что любое ребро графа G лежит хотя бы в одной из клик $K_1, \ldots, K_r$. Задача построения РПК, минимального по числу входящих в него клик, как известно, является NP-полной (см., например, [1]). Поскольку каждую из клик в наборе $K_1, \ldots, K_r$ можно дополнить произвольным образом до максимальной клики и получить также РПК, то будем считать, что в определении РПК и далее речь идет о максимальных кликах.

Легко выделить клики, которые обязаны содержаться в каждом РПК для данного графа. Назовем ребро e графа G *собственным ребром клики* K, если оно лежит в этой клике и не лежит ни в какой другой клике графа G. Соответственно, клику K, имеющую хотя бы одно собственное ребро, назовем *зафиксированной*.

Утверждение 1. *Клика K входит в любое РПК графа G тогда и только тогда, когда клика K является зафиксированной.*

Добавим к этому утверждению полиномиальную распознаваемость всех зафиксированных клик графа (трудоемкость не более $O(n^4)$). Отсюда следует, что в определенном смысле графами, в которых сложно строить минимальное РПК, являются графы, не содержащие зафиксированных клик, или, что эквивалентно, собственных ребер. Далее такие графы, т. е. графы, в которых каждое ребро лежит не менее, чем в двух кликах, назовем *графами, свободными от собственных ребер.*

Также для облегчения поиска минимального РПК можно использовать следующее свойство. Введем на множестве вершин графа G отношение эквивалентности. Две вершины x и y называются *эквивалентными*, если они смежны и их окружения совпадают, т. е. $N(x) = N(y)$. Графом $G \setminus x$ для графа G и его вершины x назовем граф, полученный удалением из G вершины x и всех инцидентных ей ребер. Верно следующее утверждение.

Утверждение 2. *Если в графе G существуют две эквивалентные вершины x и y, то из любого* РПК $K_1, \ldots, K_r$ *графа G можно построить* РПК *графа* $G \setminus y$, *удалив вершину y из тех клик $K_1, \ldots, K_r$, в которых она содержится; при этом минимальные РПК перейдут в минимальные.*

То есть перед поиском минимального РПК следует из каждого класса эквивалентности оставить в графе ровно по одному представителю, удалив все остальные вершины. Трудоемкость разбиения множества вершин на классы эквивалентности, очевидно не, превышает $O(n^4)$. Далее графы, в которых каждый класс эквивалентности содержит ровно одного представителя, назовем *сжатым графом.*

Утверждение 3. *Сжатым графом, свободным от собственных ребер, с наименьшим количеством вершин является граф B порядка* 6.

Основным содержанием работы, представленной данным сообщением, является описание сжатых графов, свободных от собственных ребер и обладающих наибольшим значением плотности при фиксированной максимальной степени. Напомним, что $\rho(G)$ обозначает плотность графа G, т. е. мощность наибольшей клики; $\Delta(G)$ обозначает максимальную степень графа G. Для произвольного графа верно очевидное неравенство $\rho(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

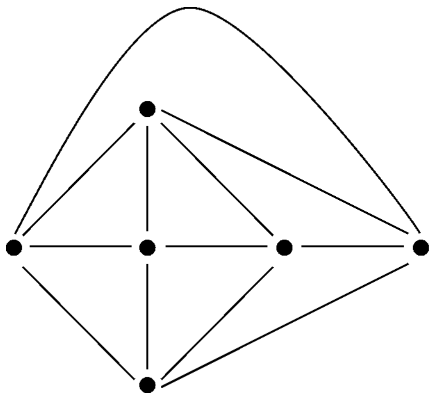
Теорема. *Пусть G является сжатым графом, свободным от собственных ребер. Тогда*:

1) $\rho(G) \leqslant \Delta(G) - 1$;

2) *если* $\rho(G) = \Delta(G) - 1$, *то* $\Delta(G) = 4$ *и каждая компонента связности графа G есть граф B*;

3) *если* $\rho(G) = \Delta(G) - 2$, *то в графе G существует не менее двух вершин степени* $\Delta(G)$.

Следствие. *Существует единственный граф, свободный от собственных ребер, с условием $\Delta(g) \leqslant 4$ — это граф B.*



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Orlin J.* Contentment in graph theory: Covering graphs with cliques. — Indagationes Math., 1977, v. 39, p. 406–424.