К. К. Р ы б н и к о в (Москва–Мытищи, МГУ леса). **Приближенные методы настройки формального нейрона для решения задачи распознавания двух векторных массивов.**

Рассмотрим функцию $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, имеющую вид

$$z = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i > b, \\ 0, & \text{в потивном случае,} \end{cases} \tag{1}$$

где параметры функции b, a_i, «+», «·», «>» — действительные числа и отношения, а неизвестные x_i равны 0 или 1. Такая функция называется *пороговой*. Она является простой и достаточно точной моделью нейрона живого организма, которая получила название *формального нейрона*.

Задачей настройки формального нейрона, распознающего массивы X и Y, называется задача определения таких $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ (или $a_1, a_2, \ldots, a_n$ при заданном b), что

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{(i)} \leqslant b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, t_1, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j y_j^{(k)} > b, \qquad k = 1, 2, \ldots, t_2, \tag{3}$$

где $X = \{(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)})\}$, $|X| = t_1$, $Y = \{(y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})\}$, $|Y| = t_2$.

Если система неравенств (2)–(3) совместна, то любое ее решение $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при заданном b определяет пороговую функцию. В противном случае приходится рассматривать возможность приближенного решение задачи, т. е. построение функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая будет принимать нулевые значения не только для векторов массива X, но, возможно, и для некоторых векторов массива Y. Качество приближения зависит от числа таких векторов.

В этом случае предлагается рассмотреть задачу чебышевского приближения системы линейных неравенств

$$\eta_i \equiv \eta_i(\widetilde{a}) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{(i)} - b \leqslant 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, t_1, \tag{4}$$

$$\omega_k \equiv \omega_k(\widetilde{a}) = -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{(k)} + b + z_k \leqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, t_2, \tag{5}$$

где $\widetilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, z_1, z_2, \ldots, z_{t_2})$ — неизвестный вектор, т. е. задачу определения величины L, где

$$L = \min_{\widetilde{a}} \max\{\max_{1 \leqslant i \leqslant t_1} \eta_i(\widetilde{a}), \max_{1 \leqslant k \leqslant t_2} \omega_k(\widetilde{a})\} = \max\{\max_{1 \leqslant i \leqslant t_1} \eta_i(\widetilde{a}^*), \max_{1 \leqslant k \leqslant t_2} \omega_k(\widetilde{a}^*)\}. \tag{6}$$

Система (4)–(5) совместна тогда и только тогда, когда $L \leqslant 0$. Если же $L > 0$, то система несовместна. Задача определения $\widetilde{a}^*$ называется *задачей чебышевского решения* системы (4)–(5) при ее совместности и *задачей чебышевского приближения* этой системы при ее несовместности. Эта задача может быть сведена к задаче линейного программирования [1].

Построенная таким образом пороговая функция $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которой пороговое значение b, вообще говоря, может быть скорректировано величиной L, разумеется, не позволяет решить задачу распознавания массивов. Оценка качества пороговой функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в общем виде до сих пор не получена. В частных случаях возможно использование следующего подхода.

Рассмотрим псевдобулево неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b, \quad x_j \in \{0,1\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

соответствующее построенной пороговой функции.

Минимальным покрытием неравенства (7) называется такое множество C, $C \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, что

$$\sum_{j \in C} |a_j| > b - \sum_{j=1}^{n} \min\{0, a_j\}, \tag{8}$$

причем для любого множества C' ($C' \subset C$) свойство (8) не выполняется.

Теорема [2]. *Пусть* $m = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ *— множество минимальных покрытий* (7). *Тогда это неравенство имеет*

$$N = 2^n - \sum_{j=1}^{s} 2^{n-|C_j|} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{s} 2^{n-|C_i \cup C_j|} - \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i\neq j,\ j\neq k}}^{s} 2^{n-|C_i \cup C_j \cup C_k|} + \cdots + (-1)^s 2^{n-|C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_s|} \tag{9}$$

псевдобулевых решений.

Как отмечалось в [2], для получения оценок числа N можно использовать небольшое число слагаемых в (9) (например, $i = 1, 2$).

Число векторов, удовлетворяющих неравенству (6), но не входящих в массив X, равно $N - t_1$ в том случае, когда система (2) совместна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967, 460 с.
2. *Рыбников К. К.* Методы анализа псевдобулевых систем линейных неравенств и их приложения к изучению узлов нейросетей. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 561–563.