Т. И. Д е н и с е н к о, Е. Ф. Т и м о ф е е в а (Ставрополь, СевКавГТУ). **Обоснование интегро-дифференцифльной модели с помощью вариационных законов.**

Одной из базовых математических моделей является уравнение $(EJu'')^n = f$. Для разработки методики построения и анализа модели воспользуемся решением задачи: вариационное обоснование математической модели в виде интегро-дифференциального уравнения.

Пусть вдоль отрезка $[0,1]$ расположен стержень, помещенный в упругую среду, локальный коэффициент упругости которого dQ, левый конец которого закреплен, а правый свободен. Полная энергия закрепленного стержня определяется функционалом

$$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{pu''^2}{2}\,dx + \int_0^1 \frac{u^2}{2}\,dQ - \int_0^1 u\,dF, \qquad (1)$$

где $p > 0$ — жесткость стержня.

Функционал (1) будем рассматривать на множестве $E = \{u \in C^1[0,1]$ и $u'' \in BV[0,1] | u(0) = u'(0) = 0\}$, где $C^1[0,1]$ — пространство один раз непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций; $BV[0,1]$ — пространство функций на $[1,1]$ вариации.

Реальная деформация $u_0(x)$ консоли дает минимум функционала (1) на E — модель Юнга и $J(x)$ — момент инерции поперечного сечения постоянны, и если $f(x) = \mathrm{const}$, то данная модель решается стандартно. Поэтому на E будем иметь, что у функции

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) = \Phi(u_0+\lambda h) &= \int_0^1 \frac{p\,u_0''^2}{2}\,dx + \lambda\int_0^1 p\,u_0''h''\,dx + \lambda^2\int_0^1 \frac{p\,h''}{2}\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{u_0^2}{2}\,dQ + \lambda\int_0^1 u_0 h\,dQ + \lambda^2\int_0^1 \frac{h^2}{2}\,dQ - \int_0^1 h\,dF\end{aligned}$$

$\lambda = 0$ есть точка минимума, тогда $\varphi'(0) = 0$, т. е.

$$\varphi'(0) = \int_0^1 u_0''h''\,dx + \int_0^1 u_0 h\,dQ - \int_0^\alpha h\,dF = 0. \qquad (2)$$

Введем обозначения:

$$\alpha(x) = \int_0^x u_0(s)\,dQ(s), \quad \alpha^{-1}(x) = \int_0^x \alpha(t)\,dt, \quad F^{-1}(x) = \int_0^x F(s)\,ds.$$

Проинтегрируем дважды по частям второй и третий интегралы в выражении (2) и избавимся от h. Тогда (2) можно переписать в виде

$$h(1)\alpha(1) - h'(1)\alpha^{(-1)}(1) - F(1)h(1) + F^{(-1)}(1)h'(1) + \int_0^1 (P\,u_0'') + \alpha^{(-1)} - F^{(-1)})h''\,dx = 0 \quad (3)$$

для любого $h \in E$.

На основании леммы, что $A(x) \in BV[0,1]$ для любого h, принадлежащего множеству $E_0 = \{h \in E | h(1) = h'(1) = 0\}$, и $\int_0^1 Ah''\,dx = 0$, тогда $A(x)$ на $[0,1]$ есть тождественный нуль, из равенства (3) вытекает тождество $Pu_0''(x) + \alpha^{-1}(x) - F^{-1}(x) \equiv 0$ и условия

$$\alpha(1) - A(1) = 0, \qquad (4)$$

$$-\alpha^{(-1)}(1) - F^{(-1)}(1) = 0. \qquad (5)$$

Поэтому

$$Pu_0''(x) \equiv -\int_0^x \alpha(s)\,ds + \int_0^x F(x)\,ds, \qquad (6)$$

Из (5) и (6) вытекает $Pu_0''(1) = 0$.

Функции $\alpha^{(-1)}$ и $F^{(-1)}$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$, тогда, продифференцировав (6) по x, получим

$$(Pu_0'')'(x) = -\int_0^1 u(s)\,dQ(s) + F(x), \tag{7}$$

а при условии (4): $(Pu_0'')'(1) = 0$.

Решение краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения (7) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} &P(u'')'(x) + \int_0^x u(s)\,dQ(s) = F(x) + \mathrm{const}, \\ &u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(0) = 0, \quad P(u'')'(1) = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Для решения уравнения (7) рассмотрим пространство $Q = \{u'' \in AV[0,1],\ u''' \in BV[0,1]\}$ с нормой $\|u\| = |u(0) + u'(0)| + |u''(0)| + |u'''(0)| + V_0^1(u_0''')$, где $V_0^1(\varphi)$ — полная вариация φ на $[0,1]$.

Краевая задача (8) будет невырожденной, если однородная краевая задача ($F(x) = \mathrm{const}$) имеет только тривиальное решение. Для того чтобы это решение получить, равенство $P(u'')'(x) \equiv -\int_0^x u(s)\,dQ(s) + \mathrm{const}$ умножим на $u'(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1. В результате получим $Pu''^2(x) \equiv 0$, $u''(x) \equiv 0$, $u'(x) \equiv \mathrm{const}$, $u'(x) = 0$. Отсюда следует $u(x) = \mathrm{const}$, а так как $u(0) = 0$, то и $u(x) = 0$.

Найдя вторую производную $\varphi''(x)$ функции $\varphi(\lambda)$: $\varphi''(0) = \int_0^1 Ph''^2\,dx + \int_0^1 h^2\,dQ$, получаем, что $\varphi''(0) > 0$, если $h \neq 0$, т. е. $u_0(x)$ дает минимум функционалу $\Phi(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
2. *Шилов Г. Е.*, *Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. Общая теория. М.: Наука, 1967.