И. А. Ч е п л ю к о в а (Петрозаводск, ИПМИ КарНЦ РАН)**. Об асимптотике статистики типа χ^2 для условных случайных Интернет-графов.**

При изучении структуры и функционирования сложных сетей телекоммуникаций, в частности, Интернета часто используются случайные графы. Рассмотрим одну из наиболее известных конструкций такого графа. Пусть граф содержит N основных вершин, занумерованных числами от 1 до N, и одну вспомогательную вершину. Степени основных вершин задаются независимыми случайными величинами $\eta_1, \ldots, \eta_N$, для которых $\mathbf{P}\{\eta_i \geqslant k\} = k^{-\tau_i}$, $\tau_i > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots, N$. В случае, если сумма степеней нечетна, вводится дополнительная вершина с единичной степенью.

Рассмотрим подмножество Интернет-графов при условии, что сумма степеней всех вершин задана и равна n. Статистическая гипотеза состоит в том, что параметры распределения $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ одинаковы, т. е. $\tau_1 = \tau_2 = \cdots = \tau_N = \tau$. Для проверки этой гипотезы естественно использовать статистику типа χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{(\eta_i - n/N)^2}{n/N}.$$

Введем такие независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, что $\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = \lambda^k p_k (1 - (1-\lambda)\Phi(\lambda, \tau, 1))^{-1}$, где $k = 1, 2, \ldots$, $0 < \lambda < 1$, $\Phi(\lambda, \tau, 1) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1}/j^{\tau}$.

Обозначим $\nu = \xi_1(\xi_1 - 1)/2$, $a = \mathbf{E}\,\nu$, $\rho = \operatorname{Cov}(\nu, \xi_1)/\sqrt{\mathbf{D}\,\nu \mathbf{D}\,\xi_1}$, $\sigma^2 = \mathbf{D}\,\nu$.

Теорема. *Пусть $N, n \to \infty$ так, что $n/N \to \zeta(\tau)$, где $\zeta(\tau)$ — значение дзета-функции Римана в точке τ. Тогда равномерно относительно таких целых k, что $(k - Na)/(\sigma\sqrt{N(1-\rho^2)})$ лежит в любом конечном фиксированном интервале,*

$$\mathbf{P}\left\{\chi^2 = \frac{2Nk}{n} + N - n\right\} = \frac{1 + o(1)}{\sigma\sqrt{2\pi N(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{(k - Na)^2}{2N\sigma^2(1-\rho^2)}\right\}.$$