В. А. Алякин, Д. Э. Клепнев (Самара, СамГУ). **Диагональная сходимость почти всюду.**

Пусть $(X, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ — неотрицательные σ-аддитивные меры на $\mathcal{F}$. Пусть $f, f_1, f_2, \ldots$ — измеримые скалярные функции на $(X, \mathcal{F})$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{f_k\}$ сходится к f *диагонально почти всюду* относительно последовательности $\{\mu_k\}$, если $\mu_n\{x \in X\colon f_k(x) \not\to f(x)\} \to 0$, $k, n \to \infty$.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $\{f_k\}$ сходится к f *диагонально* относительно последовательности $\{\mu_k\}$, если $\mu_n\{x \in X\colon |f_k(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$, $k, n \to \infty$.

Далее меры $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ — конечные, $\mu_k A \to \mu A$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Теорема 1. *Если последовательность $\{f_k\}$ сходится к f диагонально почти всюду относительно последовательности $\{\mu_k\}$, то она сходится к f диагонально относительно последовательности $\{\mu_k\}$.*

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{f_k\}$ сходится к f диагонально почти всюду относительно последовательности $\{\mu_k\}$. Для того чтобы $\int_A f_k\, d\mu_k \to \int_A f\, d\mu$ для любого $A \in \mathcal{F}$, достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta > 0$, что $\mu_k A < \delta \Longrightarrow |\int_A f_k\, d\mu_k| < \varepsilon$ при любых $A \in \mathcal{F}$ и k.*

Имеется контрпример, показывающий, что условие предыдущей теоремы не является необходимым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арешкин Г. Я.* О переходе к пределу под знаком интеграла Радона. — Сообщ. АН Груз. ССР, 1949, т. 10, № 2, с. 69–76.
2. *Serfozo R.* Convergence of Lebesgue integrals with varying measures. — Indian J. Statist., Ser. A, 1982, v. 44, Pt. 3, p. 380–402.