Е. Г. Гольштейн (Москва, ЦЭМИ РАН). **Численный метод решения одной задачи равновесия.**

Пусть $\mathbf{E}$ — евклидово пространство, G — непустой выпуклый компакт, содержащийся в $\mathbf{E}$, $\Phi(u,w)$ $((u,v) \in G \times G)$ — функция с вещественными значениями. Рассматривается задача $P(\Phi,G)$ определения такой точки $u^* \in G$, что $\Phi(u^*,u^*) = \max_{u\in G}\Phi(u,u^*)$. Если Φ непрерывна на $G\times G$ и вогнута по $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$, то задача $P(\Phi,G)$ разрешима. Численный метод решения задачи $P(\Phi,G)$ выглядит следующим образом. Фиксируется произвольное число $\varepsilon > 0$. Перед началом любой итерации k предполагается, что уже найдены точки $u_i \in G$ и векторы $l_i \in \partial_u\Phi(u_i,u_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ (в качестве u_1 можно использовать произвольную точку G), и определена задача

$$\mathcal{A}_k: \quad \tau \to \max, \quad \langle l_i, u - u_i\rangle \geqslant \tau, \qquad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad u \in G.$$

Итерация k начинается с вычисления Δ_k, равного максимальному значению переменной τ задачи $\mathcal{A}_k$, и определения множителей Лагранжа μ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, этой задачи. Если $\Delta_k \leqslant \varepsilon$, то итерация k является последней, а в качестве приближенного решения задачи $P(\Phi,G)$ принимается точка $u_k^* = \sum_{i=1}^k \mu_i u_i \in G$. В противном случае множество точек $\{u_1,\dots,u_k\}$ пополняется новой точкой u_{k+1} — решением задачи

$$\|u - u_k\|^2 \to \min, \quad u \in M_k(\Delta_k/\sqrt{2}),$$

где $M_k(\tau) \subset G$ есть множество, определяемое ограничениями задачи $\mathcal{P}(\Phi,G)$ при фиксированном значении $\tau \leqslant \Delta_k$. Под *ε-решением* задачи $P(\Phi,G)$ при любом $\varepsilon \geqslant 0$ условимся понимать такую точку $u_\varepsilon \in G$, для которой справедливо неравенство

$$\max_{u\in G}\Phi(u,u_\varepsilon) - \Phi(u_\varepsilon,u_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Теорема. *Допустим, что $\Phi(u,w)$, $((u,v) \in G\times G)$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица с постоянной L, вогнутая по $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$, выпуклая по $w \in G$ при любом фиксированном $u \in G$, и, кроме того, $\Phi(u,u)$ $(u \in G)$ — вогнутая функция. В таком случае приведенный выше численный метод решения задачи $P(\Phi,G)$ позволяет при произвольном $\varepsilon > 0$ найти ε-решение этой задачи за $k(\varepsilon)$ итераций, причем $k(\varepsilon) \leqslant]4(dL\varepsilon^{-1})^2[$, где d — диаметр G, под $]a[$ при любом вещественном a понимается наименьшее целое число, большее либо равное a.*

Пусть T — точечно-множественное отображение точек $u \in G$ в непустые множества $T(u) \subset \mathbf{E}$. Вариационное неравенство, определяемое отображением T, имеет вид

$$\langle t, u' - u\rangle \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u \in G, \quad t \in T(u), \quad u' \in G.$$

Под решением этого вариационного неравенства понимается такая точка $u^* \in G$, что при некотором $t^* \in T(u^*)$ неравенство $\langle t^*, u' - u^*\rangle \geqslant 0$ выполняется для всех $u' \in G$. Введем точечно-множественное отображение $T_\Phi(u) = -\partial_u\Phi(u,u)$, $u \in G$. Задача $P(\Phi,G)$ эквивалентна вариационному неравенству, определяемому отображением T_Φ. В работе [1] описан достаточно эффективный численный метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями. Предположения о том, что функция Φ удовлетворяет условию Липшица, о ее вогнутости по $u \in G$ при любом фиксированном $w \in G$ и монотонности отображения T_Φ обеспечивают сходимость этого метода. Таким образом, для решения задачи $P(\Phi,G)$ можно использовать метод из [1], если точечно-множественное обображение T_Φ обладает свойством монотонности. Заметим, что допущения относительно Φ, отмеченные в теореме, влекут за собой монотонность отображения T_Φ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-01-00156.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гольштейн Е. Г.* Метод решения вариационных неравенств, определяемых монотонными отображениями. — Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 2002, т. 42, № 7.