Е. Ф. Тимофеева (Ставрополь, СевКавГТУ). **Построение и исследование дискретной математической модели процессов транспорта взвешенных наносов в прибрежной зоне водоемов.**

Динамика морских наносов при решении задачи о переформировании прибрежной зоны водоемов, где вода и твердые частицы перемещаются в сторону берега, описывается уравнением:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial H}{\partial x}\right) + b = f(x;t), \tag{1}$$

где

$$a = \frac{3Q_0}{\mathrm{tg}\varphi_0(1-\varepsilon)}, \quad b = \frac{1}{1-\varepsilon}\frac{\partial Q_0}{\partial x}, \quad f(x;t) = h_0\sin(\omega t + \theta).$$

Уравнение неразрывности дополняется начальным условием $H(x) = S_0 x$ при $t = t_0$ и граничными условиями в верхней границе наката и на границе «глубокой воды»: $H(x_{\text{Н}};t) = H_{\text{Н}}$, $x_{\text{Н}} = H_{\text{Н}}/S_0$, $H(x_{\text{ГЛ}};t) = H_{\text{ГЛ}}$, $H_{\text{ГЛ}} = \lambda_0/2$. Здесь ε — пористость грунта; H — глубина дна, отсчитываемая от невозмущенного уровня водоема; Q — расход наносов; ω — частота волны; S_0 — начальный уклон дна; h_0, λ_0 — высота и длина волны; τ — период волны; φ_0 — угол естественного откоса грунта в воде.

Поставленная для уравнения параболического типа (1) начально-краевая задача решается приближенно конечно-разностным методом. Уравнение в частных производных (1) аппроксимируется по двухслойной неявной схеме системой линейных конечно-разностных уравнений

$$\frac{H_i^{j-1} - H_i^j}{\Delta t} - \frac{1}{\Delta x}\left[a^j_{i+1/2}\left(\frac{H^{j+1}_{i+1} - H^{j+1}_i}{\Delta x}\right) - a^j_{i-1/2}\left(\frac{H^{j+1}_i - H^{j+1}_{i-1}}{\Delta x}\right)\right] + b^j_i = f^j_i,$$

$$H_i^j = H(x_i, t_j);\ a^j_{i+1/2} = \frac{a_{i+1} + a_i}{2};\ a^j_{i-1/2} = \frac{a_{i-1} + a_i}{2};\ b^j_i = \frac{Q^j_{i+1} - Q^j_i}{\Delta x};\ f^j_i = f(x_i, t_j).$$

При численной реализации математической модели система уравнений преобразуется к стандартному виду, и в соответствии с теорией метода прогонки находятся прогоночные коэффициенты, в результате значения искомой функции определяются следующим образом: $H_i^{j+1} = P_i H^{j+1}_{i+1} + W^{j+1}_i$.

Для проверки устойчивости задачи, поставленной в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial H}{\partial x}\right) + b = f(x;t), \quad H(x) = S_0 x, \quad H|_{x\in\gamma} = \mu,$$

необходимо разбить ее на две подзадачи и доказать устойчивость каждой.

Первая подзадача выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial H^{(1)}}{\partial x}\right), \quad H^{(1)}|_{x\in\gamma} = 0.$$

Дифференциальное уравнение (3) в разностной форме имеет вид $(H_i^{j+1} - H_i^j)/\tau = (H^j_{i+1} - 2H^j_i + H^j_{i-1})/h_x^2$, где $H_i^0 = \nu(x_i)$, $H_0^j = 0$, $H_N^j = 0$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant K$.

Устойчивость явной схемы исследуется методом гармоник, который позволяет получить необходимые условия устойчивости дискретной модели, отсеивая заведомо непригодные схемы. Этот метод не учитывает влияние граничных условий и правых частей на решение задачи, а дает условия устойчивости по начальным данным. В результате получено достаточно жесткое ограничение для разностной схемы $\tau \leqslant h^2/2$, при котором схема устойчива.

Вторая подзадача выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial H^{(2)}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial H^{(2)}}{\partial x}\right) + b = f(x;t), \quad H^{(2)}|_{x\in\gamma} = \mu.$$

Дифференциальное уравнение в разностной форме имеет вид $(H_i^{j+1} - H_i^j)/\tau - (H_{i+1}^j - 2H_i^j + H_{i-1}^j)/h_x^2 = F_i^j$, где $F_i^j = f_i^j - b$, $H_i^0 = \nu(x_i)$, $H_0^j = \mu_1^j$, $H_N^j = \mu_2^j$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $0 \leqslant j \leqslant K-1$.

Представив разностную схему в канонической форме, а также учитывая общий вид оператора и выбрав центр шаблона $p \equiv (x_i, t^{j+1})$, находится аналогичное условие $\tau < h^2/2$, при выполнении которого схема будет принадлежать исходному семейству. Установлено, что все необходимые условия теоремы об обобщенной оценке неоднородного уравнения выполняются. Таким образом, доказана устойчивость схемы по граничным условиям и правой части сеточного уравнения. Учитывая доказанную устойчивость двух подзадач, исходная схема устойчива.

Для определения погрешности аппроксимации выражение для F_i^j разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки (x_i, t_j), в результате уравнение принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + O\left(\tau + h^2\right) = F.$$

Учитывая исходную задачу (5), где $F = f(x;t) - b$, получена погрешность аппроксимации $O\left(\tau + h^2\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Леонтьев И. О.* Прибрежная динамика: волны, течения, потоки наносов. М.: ГЕОС, 2001.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.