Т. А. Уразаева (Йошкар-Ола, МарГТУ). **О модельной погрешности оценок меры возмущенной вероятности и VaR портфеля.**

Использование дискретных моделей развивающихся экономик, представленных в виде конструкций языка логического программирования ПРОЛОГ [3] или в виде сетей Петри с нечетким поведением [1] в условиях, когда мощность семейства траекторий моделируемой системы на момент закрытия позиции превышает 10^9, приводит к появлению особого рода погрешностей. Они связанны с отказом от хранения в памяти компьютера точечных вероятностей и, соответственно, с использованием относительно небольшого количества последовательно расположенных интервалов, для которых происходит накопление вероятностей попадания в них моделируемого показателя. Будем называть эту погрешность *модельной*. Оценка описанной модельной погрешности для функционала ожидаемой полезности была получена в [4]. В работе, представленной данным сообщением, приведены ее оценки для меры риска, основанной на концепции «возмущенной вероятности» и ее частного случая — меры Value-at-Risk. Мера возмущенной вероятности была предложена в исследованиях С. Ванга [5], а свое русскоязычное название она получила в трудах А. А. Новоселова [2].

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство, описывающее состояние портфеля финансовых инструментов (ПФИ) на момент закрытия оцениваемой позиции; $X\colon \Omega \to \mathbf{R}$ — действительная случайная величина капитализации, определенная на этом вероятностном пространстве; $P_X S = \mathbf{P}\{\omega\colon X(\omega) \in S\}$ — распределение вероятностей $X, S \in \mathcal{B}$; $\mathcal{B}$ — борелевское поле на $\mathbf{R}$; $F_X(x) = P_X(-\infty, x) = \mathbf{P}\{\omega\colon X(\omega) < x\}$ — функция распределения случайной величины $X, x \in \mathbf{R}$; $S_X(x) = P_X[x, +\infty) = \mathbf{P}\{\omega\colon X(\omega) \geqslant x\}$ — дополнительная функция распределения случайной величины $X, x \in \mathbf{R}$. Пусть далее $g\colon [0,1] \to [0,1]$ — такая неубывающая функция, что $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Предположим, что в ходе исследования модели ПФИ удалось вычислить n таких значений $p_i = P_X[x_{i-1}, x_i) \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Необходимо оценить значение функционала меры возмущенной вероятности $\mu_g(X) = -\int_{\mathbf{R}} x\, dg(S_X(x))$.

Рассмотрим класс функций распределений $\mathcal{F}(a,b,p) = \{F_X\colon \int_a^b dF_X(x) = p\}$, элементы которого обеспечивают заданную вероятность попадания значения случайной величины X в заданный интервал. Для данного класса функций можно доказать следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть* $a < b$ *и* $0 < p \leqslant 1$. *Если функция* g *неубывающая, то*

$$\inf_{\mathcal{F}(a,b,p)} \left[-\int_a^b x\, dg(S_X(x)) \right] = a[g(S_X(a)) - g(S_X(b))],$$

$$\sup_{\mathcal{F}(a,b,p)} \left[-\int_a^b x\, dg(S_X(x)) \right] = b[g(S_X(a)) - g(S_X(b))].$$

Поскольку знание величин p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, означает знание функции F_X с точностью до принадлежности ее к классу $\cap_{i=1}^n \mathcal{F}(x_{i-1}, x_i, p_i)$, то, используя данное утверждение, можно получить следующую оценку меры возмущенной вероятности: $\mu_1 \leqslant \mu_g(X) \leqslant \mu_2$, где

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n-1} x_{i-1} \left[g\biggl(\sum_{k=i}^{n} p_k \biggr) - g\biggl(\sum_{k=i+1}^{n} p_k \biggr) \right] + x_{n-1} g(p_n),$$

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \left[g\biggl(\sum_{k=i}^{n} p_k \biggr) - g\biggl(\sum_{k=i+1}^{n} p_k \biggr) \right] + x_n g(p_n).$$

Нетрудно заметить, что мера риска VaR_α является частным случаем меры возмущенной вероятности, в котором возмущающая функция определена следующим образом:

$$g(p) = \begin{cases} 0, & p \leqslant 1-\alpha, \\ 1, & p > 1-\alpha. \end{cases}$$

Соответственно, для ее модельной погрешности имеем $x_{j-1} \leqslant \mathrm{VaR}_\alpha \leqslant x_j$, где j удовлетворяет следующим соотношениям: $1 - \sum_{k=j}^{n} p_k < \alpha$ и $1 - \sum_{k=j+1}^{n} p_k \geqslant \alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бородин А. В.* Сети Петри с нечетким поведением в задачах имитационного моделирования эволюции инвестиционных и страховых портфелей. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2000, т. 7, в. 2, с. 321–322.
2. *Новоселов А. А.* О неприятии риска и норме замещения риска доходностью. — Математические модели природы и общества. Красноярск: ИВМ СО РАН, КГТЭИ, 2002, с. 148–153.
3. *Уразаева Т. А.* Использование языка логического программирования ПРОЛОГ для построения моделей институциональной экономики. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 4, с. 1110–1111.
4. *Уразаева Т. А.* Об одной модельной погрешности оценки ожидаемой полезности портфеля. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2006, т. 13, в. 5, с. 883–884.
5. *Wang S.* Premium calculation by transforming the layer premium density. — ASTIN Bulletin, 1996, v. 26, p. 71–92.