А. Л. Сунчалина (Москва, МГТУ). **О билинейных разложениях для двумерного отрицательного биномиального распределения.**

Двумерная плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ допускает билинейное разложение по системе ортогональных многочленов, если она представима в виде

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k g_k^{(1)}(x) g_k^{(2)}(y) \right), \tag{1}$$

где $g_k^{(i)}(x)$ — система ортогональных многочленов с весовой функцией $f_i(x)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_k^{(i)}(x) g_l^{(i)}(x) f_i(x)\, dx = \delta_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{при } l = k, \\ 0, & \text{при } l \neq k. \end{cases}$$

В работах [1]–[3] исследованы свойства билинейных разложений для случаев, когда маргинальные плотности являются плотностями гауссовского распределения, гамма-распределения и распределения Пуассона. В частности, найдены необходимые и достаточные условия для последовательности μ_k, при которых разложение (1) дает двумерную плотность с маргинальными плотностями $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Коэффициент μ_k является коэффициентом корреляции между случайными величинами $g_k^{(1)}(\xi_1)$ и $g_k^{(2)}(\xi_2)$, где вектор (ξ_1, ξ_2) имеет плотность распределения (1).

С точки зрения практических приложений, представляет интерес параметрический случай, когда $\mu_k = \rho^k$.

Характерной особенностью двумерных распределений, допускающих представление (1), является линейность модели регрессии. Так, для случая, когда маргинальные распределения задаются отрицательным биномиальным распределением, используя выражения для соответствующих ортогональных многочленов ([6]), несложно получить

$$\mathbf{M}\{\xi_2 | \xi_1 = x\} = \frac{p_1 \sqrt{r_2 q_2}}{p_2 \sqrt{r_1 q_1}} \rho x + \frac{\sqrt{r_2 q_2} (\sqrt{r_2 q_2} - \rho \sqrt{r_1 q_1})}{p_2},$$

где p_i и r_i — параметры маргинальных распределений координат.

Из неравенства $\mathbf{M}\{\xi_2 | \xi_1 = x\} \geqslant 0$ следует $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{q_2 r_2 / (q_1 r_1)}$. Аналогично, рассматривая регрессию ξ_1 на ξ_2, получаем $0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{q_1 r_1 / (q_2 r_2)}$. Таким образом, необходимым условием того, что разложение (1) с $\mu_k = \rho^k$ является двумерной плотностью, имеющей отрицательное биномиальное распределение в качестве маргинальных распределений, является условие

$$0 \leqslant \rho \leqslant \min \left\{ \sqrt{q_2 r_2 / (q_1 r_1)}, \sqrt{q_1 r_1 / (q_2 r_2)} \right\}. \tag{2}$$

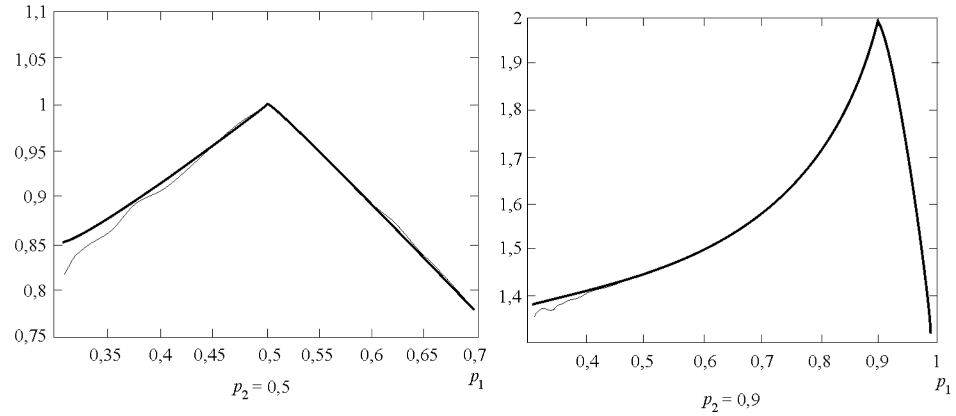
Достаточным условием того, что разложение (1) является двумерной плотностью, является условие

$$f(x, y) \geqslant 0. \tag{3}$$

При помощи математического моделирования рассчитывалось максимальное значение коэффициента корреляции, при котором совместная плотность распределения принимает положительные значения в области D_k, где

$$D_k = \left\{ (x, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant k,\ 0 \leqslant y \leqslant k,\ \sum_{x=0}^{k} \sum_{y=0}^{k} f(x, y) \geqslant 0,995 \right\}.$$

На рисунках представлены графики максимального достижимого значения коэффициента корреляции и верхней границы для коэффициента корреляции, которую дает необходимое условие (2) для двух различных значений параметра p_2. Моделирование проводилось для геометрического распределения. Графики наводят на мысль, что, по-видимому, условие (2) является не только необходимым, но и достаточным. Отклонения кривых на левом хвосте графика связано с тем, что условие (3) проверяется для ограниченной области, а не на всей плоскости.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сарманов О. В.*, *Братоева З. Н.* Вероятностные свойства билинейных разложений по полиномам Эрмита. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. XII, в. 3, с. 520–531.
2. *Griffiths R. C.* The canonical correlation coefficients of bivariate gamma distributions. — Ann. Math. Statist., 1969, v. 40, p. 1401–1408.
3. *Meixner J.* Erzeugende Funktionen der Charlierschen Polinome. — Math. Z., 1938, B. 44, S. 531–535.
4. *Ветров Л. Г.* Билинейные разложения двумерных вероятностных плотностей по ортогональным многочленам. — Теория вероятн. и матем. статист., 1988, № 39, с. 24–29.
5. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно геометрического распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т. 10, в. 2, с. 520.
6. *Хохлов В. И.* Многочлены, ортогональные относительно отрицательного биномиального распределения. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2003, т. 11, в. 3, с. 487–492. Письмо в редакцию. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т. 12, в. 1, с. 207.