Е. С. Паламарчук (Москва, ЦЭМИ РАН). **О задаче управления капиталом компании в условиях неполноты информации.**

Управление некоторыми экономическими переменными нередко приходится осуществлять в условиях неполной информации о состоянии системы, когда имеются в распоряжении только наблюдения с «шумами». Так, при управлении капиталом фирмы часто нет возможности напрямую получать информацию о его реальной (рыночной) величине и динамике, при этом доступными для инвестора оказываются данные бухгалтерского учета и экспертные оценки, лишь частично отражающие происходящие на самом деле процессы. В докладе рассматривается ситуация, когда инвестор, принимающий решения, не имеет возможности точно оценить капитал фирмы (который сам по себе подвержен случайным колебаниям), но при этом располагает информацией о показателе, на который капитал оказывает влияние — дивидендах, или доходе, получаемом от некоторой неосновной деятельности фирмы, и достаточно простым, но случайным образом связанным с размером капитала.

Пусть система управления описывается следующими стохастическими дифференциальными уравненениями для состояний и наблюдений:

$$dK_t = -kK_t\,dt + bI_t\,dt + \sigma_K\,dW_t, \quad K_0 = k_0, \tag{1}$$

$$dD_t = K_t\,dt + \sigma_D\,dV_t, \quad D_0 = 0, \tag{2}$$

где $\{K_t\}_{t=0}^{\infty}$ — управляемый случайный процесс, задающий динамику капитала, недоступного непосредственному наблюдению, $\{D_t\}_{t=0}^{\infty}$ — случайный процесс, задающий поток наблюдений (дивидендов), $\{W_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{V_t\}_{t=0}^{\infty}$ — одномерные независимые стандартные винеровские процессы, определенные на некотором вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$ и описывающие действие случайных факторов, влияющих на динамику капитала и результаты наблюдений. Случайный процесс $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$ рассматривается как процесс управления (инвестиций), который предполагается $\mathcal{D}$-согласованным, где $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_t\}$ — фильтрация, порожденная процессом наблюдений $\{D_t\}$. Константы k, b, σ_K, σ_D в уравнениях (1), (2) положительны, начальное состояние k_0 предполагается случайной величиной, имеющей нормальное распределение и не зависящей от процессов $\{W_t\}$, $\{V_t\}$.

В качестве множества допустимых управлений U будем рассматривать множество процессов $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$ указанного вида, при которых существует решение системы (1)–(2).

Определим целевой функционал, задающий совокупные издержки по управлению капиталом:

$$J_T(I^T) = \left\{ \int_0^T (q(K_t - K_t^0)^2 + I_t^2 + 2q_1 I_t)\,dt \right\}, \tag{3}$$

где q, q_1 — положительные константы, а K_t^0 — некоторая непрерывная ограниченная функция, задающая желательную (с точки зрения инвестора) траекторию изменения капитала во времени, I^T — сужение управления $\{I_t\}_{t=0}^{\infty}$ на $[0,T]$.

На конечном интервале времени инвестор решает задачу

$$\mathbf{E}\, J_T(I^T) \to \inf_{I^T \in U^T}, \tag{4}$$

где U^T — множество сужений допустимых управлений на $[0,T]$. Решение задачи управления линейной системой при неполной информации (1)–(2) с квадратичным целевым функционалом вида (3) рассматривалось в [1], со стандартным квадратичным функционалом — в [2]. Однако в рассматриваемом приложении данной модели, как и во многих других экономических приложениях, горизонт планирования и соответствующее время наблюдения не фиксируются, поэтому хотелось бы быть уверенными в том, что система имеет хорошее «долговременное» поведение. В связи с этим нас интересует вопрос о том, что происходит в ситуации, когда горизонт планирования неограниченно возрастает, или $T \to \infty$.

О п р е д е л е н и е. Управление $I^* \in U$ будем называть *оптимальным в среднем* на бесконечном интервале времени, если для любого $I \in U$

$$\limsup_{T\to\infty} \mathbf{E}\, \frac{J_T(I^{T*}) - J_T(I^T)}{T} \leqslant 0.$$

Задача (4) на конечном интервале времени, как известно, решается с помощью принципа разделения, когда исходная задача распадается на две — задачу фильтрации (построения оценки) ненаблюдаемой переменной по наблюдаемому сигналу и задачу управления по полным данным уже для отфильтрованной переменной. Решение задачи на бесконечном интервале времени связано с исследованием асимптотических свойств решений уравнений Риккати, участвующих в представлениях оптимального управления, линейной оценки состояния по наблюдениям, определяемой фильтром Калмана, и свойств соответствующих процессов. Показано, что управление I^*, оптимальное в среднем на бесконечном интервале времени в задаче (1)–(3), имеет вид $I^*_t = -[b(\Pi \widehat{K}^*_t + r_t) + q_1]$, где случайный процесс $\{\widehat{K}^*_t\}_{t=0}^{\infty}$ определяется как решение стохастического дифференциального уравнения

$$d\widehat{K}^*_t = (-k - b^2\Pi)\widehat{K}^*_t\, dt - b^2 r_t\, dt - bq_1\, dt + h_t\, dw_t, \quad \widehat{K}^*_0 = Ek_0,$$

случайный процесс $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$ определяется равенством $w_t = (D_t - \int_0^t \widehat{K}_s\, ds)/\sigma_D$, $h_t = \gamma_t/\sigma_D$, функция γ_t является решением дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{\gamma}_t = -2k\gamma_t + \sigma_K^2 - \gamma_t^2 \frac{1}{\sigma_D^2}, \quad \gamma_0 = \mathbf{D}(k_0); \quad \Pi = \frac{-k + \sqrt{k^2 + b^2 q}}{b^2}$$

есть положительный корень квадратного уравнения (алгебраического уравнения Риккати), возникающего при решении задачи с полными наблюдениями и постоянными параметрами на бесконечном интервале времени,

$$r_t = -q \int_t^{\infty} e^{(-2k - b^2\Pi)(s-t)} K_s^0\, ds - bq_1 \Pi \int_t^{\infty} e^{(-2k-b^2\Pi)(s-t)}\, ds.$$

Работа поддержана РФФИ, проект № 07–01–00541.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bensoussan A.* Stochastic control of partially observable systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1992, 352 p.
2. *Липцер Р. Ш.*, *Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974, 696 с.