М. С. Тихов, В. В. Агеев (Нижний Новгород, ННГУ). **Оценивание дисперсий оценок функции распределения в зависимости доза–эффект.**

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $F(x)$. Мы вводим случайные или неслучайные дозы U_i и наблюдаем или нет эффект, т. е. наблюдению доступна выборка $\{(W_i, U_i),\ i = 1, 2, \dots, n\}$, где U_i — независимые и одинаково распределенные случайные величины с плотностью распределения $g(x)$, $x \in \mathbf{R}^1$, независимые от $\{X_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$; $W_i = \mathbf{I}\{X_i < U_i\}$ — индикатор события $\{X_i < U_i\}$. Рассматривается задача оценивания функции распределения $F(x)$ по выборке $\{(W_i, Y_i),\ i = 1, 2, \dots, n\}$. В токсикометрии рассматриваемая модель интерпретируется как зависимость *доза–эффект*, где X — минимальная доза, с которой начинается реакция организма, U_i — вводимые в организм дозы.

Пусть $(W^{[i]}, U^{(i)})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — пара наблюдений, упорядоченная по второй компоненте, т. е. $\{U^{(i)}\}$ есть вариационный ряд, а $W^{[i]}$ есть i-я индуцированная (сопутствующая) порядковая статистика.

Рассмотрим статистики РС вида

$$\widehat{\theta}_{1n}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} W^{[i]}(U^{(i+1)} - U^{(i)}) K_h(U^{(i)} - x), \quad \widehat{\theta}_{2n}(x) = n\widehat{\theta}_{1n}(x) \Big/ \sum_{i=1}^{n-1} K_h(U^{(i)} - x),$$

где $K(x)$ — ядерная функция, $K_h(x) = (1/h)K(x/h)$, $h = h(n)$ — ширина окна просмотра данных, $h \to 0$, $nh \to \infty$, когда $n \to \infty$.

Статистики РС $\widetilde{\theta}_{1n}(x)$ (см. [1]) были предложены для оценки тренда временного ряда. В работе [2] эта статистика использовалась для оценки неизвестного распределения $F(x)$ в зависимости доза–эффект при фиксированном плане эксперимента, т. е. когда величины U_i неслучайны. В этой схеме была доказана состоятельность и асимптотическая нормальность статистик РС. Факт асимптотической нормальности не выводится напрямую из результатов работы [1], поэтому в [2] была рассмотрена своя схема доказательства асимптотической нормальности. В настоящем сообщении мы предлагаем использовать статистики РС для оценки неизвестного распределения $F(x)$ при случайном плане эксперимента в зависимости доза–эффект, т. е. когда величины U_i являются случайными величинами.

Нами показано, что для случайного плана эксперимента и при $n \to \infty$,

$$\sqrt{nh}(\widehat{\theta}_{1n}(x) - F(x)) \xrightarrow{d} N(0, 2\sigma^2(x)),$$

где $\sigma^2(x) = F(x)(1 - F(x))\|K\|^2/g^2(x)$.

Для оценки Надарая–Ватсона

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{S_{2n}(x)}{S_{1n}(x)}, \quad S_{2n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i K_h(U_i - x), \quad S_{1n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K_h(U_i - x),$$

при некоторых условиях $\sqrt{nh}(\widehat{F}_n(x) - F(x)) \xrightarrow{d} N(a(x), \sigma^2(x))$ при $n \to \infty$, где $a(x) = f'(x) + 2f(x)g'(x)/g(x)$.

При построении доверительных интервалов для функции $F(x)$ необходимо иметь оценку дисперсии $\sigma^2(x)$. Мы предлагаем следующие оценки дисперсии предельного распределения:

$$T_n(x) = \frac{S_{2n}(x)}{S_{1n}^2(x)}\left(1 - \frac{S_{2n}(x)}{S_{1n}(x)}\right)\|K\|^2,$$

$$\widehat{\sigma}_n^2(x) = \frac{n}{4}\sum_{i=1}^{n-1} (W^{[i+1]} K_h(U^{(i+1)} - x) - W^{[i]} K_h(U^{(i)} - x))^2 (U^{(i+1)} - U^{(i)})^2.$$

Показано, что предложенные статистики являются состоятельными и асимптотически нормальными оценками дисперсии $\sigma^2(x)$. Проведено как аналитическое сравнение этих оценок, так и их исследование методом Монте–Карло. Рассмотрены и изучены модификации оценок $T_n(x)$ и $\widehat{\sigma}^2_n(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Priestly M. B.*, *Chao M. T.* Nonparametric Function Fitting. — J. Royal Statist. Soc., Series B 34, 1972, p. 385–392.
2. *Тихов М. С.*, *Криштопенко Д. С.*, *Ярощук М. В.* Оценивание распределений в зависимости доза–эффект при фиксированном плане эксперимента. — Сборник научных трудов «Статистические методы оценивания и проверки гипотез». Пермь: изд-во Пермского ун-та, 2006, с. 66–77.