**Э. Ф. Хайретдинов** (Москва, НИИМ МГУ). **Новый подход к решению задачи о течении в пограничном слое.**

При проектировании крыльев самолета основное внимание обращается на то, чтобы их обтекание было ламинарным. Ламинарность нарушается, если происходит отрыв пограничного слоя, образующегося на крыле.

Дифференциальные уравнения течения жидкости в пограничном слое, прилегающем к профилю, обтекаемому потенциальным потоком, представляются в виде [1], [2]:

$$u_x + v_y = 0, \quad uu_x + vu_y = V(x)V'(x) + u_{yy} + \frac{1}{R}u_{xx}. \tag{1}$$

Здесь $V(x)$ — распределение скорости вдоль профиля при обтекании его потенциальным потоком, $R$ — число Рейнольдса (ввиду того, что $R \gg 1$, в уравнениях (1) обычно пренебрегают членом $u_{xx}$; но делать это безоговорочно можно, только если этот член равномерно ограничен в области определения функции $V(x)$).

Решение уравнений (1) должно удовлетворять граничным условиям

$$y = 0: \quad v = u = 0; \qquad y \to \infty: \quad u \to V(x). \tag{2}$$

(Уравнения (1)–(2) записаны в безразмерном виде. Функция $V(x)$ задана со следующими свойствами: $V(0) = 0$, $V(1) = 1$, $V'(1) = 0$, $V'(x) > 0$ при $0 < x < 1$, $V'(x) < 0$ при $x > 1$.)

Отрыв происходит в кормовой части профиля, вниз по потоку от той точки, где достигается максимум внешней скорости — при $x = x_* > 1$ [1], [2]. Точка отрыва определяется уравнением $u_y(x, 0) = 0$.

Вводя калиброванную функцию тока $\Psi(x, y)$: $\Psi(x, y) = \psi(x, y)/V(x)$, $u = \psi_y = V\Psi_y$, $v = -\psi_x = -V(x)\Psi_x - V'(x)\Psi$, сведем систему (1) к одному уравнению

$$\Psi_{yyy} = V'(x)(\Psi_y^2 - 1 - \Psi\Psi_{yy}) + V(\Psi_y\Psi_{xy} - \Psi_x\Psi_{yy}) - \frac{1}{R}\left(\Psi_{yxx} + 2\frac{V'}{V}\Psi_{xy} + \frac{V''}{V}\Psi_y\right). \tag{3}$$

Его решение должно удовлетворять граничным условиям

$$y = 0: \quad \Psi = \Psi_y = 0, \qquad y = \infty: \quad \Psi_y = 1. \tag{4}$$

При $R \to \infty$ уравнение (3) переходит в уравнение

$$\Psi_{yyy} = V'(x)(\Psi_y^2 - 1 - \Psi\Psi_{yy}) + V(x)(\Psi_y\Psi_{xy} - \Psi_x\Psi_{yy}). \tag{5}$$

Если скорость $V(x)$ задана в виде полинома $V(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^N$ $(N \geqslant 2)$, то решение уравнения (5) можно строить в виде функционального ряда по положительным степеням $x$: $\Psi(x, y) = x^\alpha f_\alpha(y)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots)$, но чтобы указанный выше предельный переход был возможен в области $0 \leqslant x < c_0/\sqrt{R}$ $(c_0 = \mathrm{const} \sim 1)$, необходимо выполнение одного из двух условий: либо $a_0 > 0$, либо $a_0 = 0$, $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ и ряд не должен содержать слагаемого с первой степенью $x$: $\alpha_1 = 0$.

В случае, когда $V(x) = a_0 + a_1 x$, уравнения (3) и (5) имеют общие решения. При $V = a_0$ это решение Blasius'а [1], при $a_0 > 0$, $a_1 < 0$ решение построил Howarth [1]. При $V = a_1 x$ решение (найдено Hiemenz'ом [1]) имеет вид

$$\Psi(x, y) = x f_0(y). \tag{H.}$$

Оно описывает течение в окрестности передней кромки профиля с округлой (притупленной) зоной. Заметим, что как раз такие профили имеют крылья самолетов, летающих с дозвуковыми скоростями.

Когда $V(x) = x^m$ $(0 < m < 1)$, уравнение (5) имеет решения вида

$$\Psi(x, y) = x^{(1+m)/2} f_0(\eta) \qquad (\eta = yx^{(m-1)/2})) \qquad \text{(F.} - \text{Sk.)}$$

(найденые Falkner'ом и S. Skan [1]). Но при $0 < m < 1$ член $u_{xx}$ в уравнении (1) для решения (F.–Sk.) обращается в $\infty$ при $x \to 0$, поэтому предельный переход $R \to \infty$ в уравнении (3) недопустим в области $0 \leqslant x \leqslant c_0/\sqrt{R}$.

Главной задачей теории пограничного слоя является выявление условий, при которых происходит отрыв пограничного слоя, и возможности влиять на них, чтобы в какой-то мере управлять отрывом. В настоящее время эту задачу решают приближенными способами, основанными на интегральном уравнении Кармана [2], не дающими возможности оценить точность полученного «решения». Существующие аналитические решения уравнений пограничного слоя в виде функциональных рядов по положительеым степеням переменной $x$ для этой цели не используются, так как не дают удовлетворительного результата при определении точки отрыва (эти ряды медленно сходятся в области $x > 1$, в которой происходит отрыв).

Уравнение (5) преобразуется посредством замен: $\eta = y/h(x)$, $\Psi = h(x)F(x, \eta)$ (функция $h(x)$ названа С.С.Григоряном *калибрующей толщиной пограничного слоя*), $V(x) = x^m \eta^{\varphi(x)}$ [3], $h(x) = \sqrt{x/V(x)}$ [4] и приобретает вид [3]:

$$F_{\eta\eta\eta} = m\left(F_\eta^2 - 1 - \frac{1+m}{2m} F F_{\eta\eta}\right) + x\varphi'(x)\left(F_\eta^2 - 1 - \frac{1}{2} F F_{\eta\eta}\right) + x(F_\eta F_{x\eta} - F_x F\eta\eta).$$

Когда функция $\varphi(x)$ задана в виде полинома $\varphi(x) = \sum_{i=0}^N b_i x^i$ $(N \geqslant 2)$, аналитическое решение этого уравнения представляется в виде функционального ряда $F(x, \eta) = x^\alpha f_\alpha(\eta)$ $(\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$, который при $x \to 0$ превращается в решение Falkner'a–S. Skan (в решение Hiemenz'a при $m = 1$). С учетом приведенного выше замечания необходимо положить $m = 1$, функцию $\varphi(x)$ представлять в виде $\varphi(x) = a_0 + (1/2)a_2 x^2 + (1/3)a_3 x^3 + \cdots + (1/N)a_N x^N$ (при этом $x\varphi'(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_N x^N$), а решение следует искать в виде $F(x, \eta) = f_0(\eta) + x^2 f_2(\eta) + x^3 f_3(\eta) + \cdots = x^\alpha f_\alpha(\eta)$ $(\alpha = 0, 2, 3, \ldots)$.

При $m = 1$ оно представится в виде

$$F_{\eta\eta\eta} = F_\eta^2 - 1 - F F_{\eta\eta} + x\varphi'(x)\left(F_\eta^2 - 1 - \frac{1}{2} F F_{\eta\eta}\right) + x(F_\eta F_{x\eta} - F_x F\eta\eta). \qquad (6)$$

Расчеты показывают, что решение уравнения (6), построенное в виде функционального ряда по положительныи степеням $x$, не дает возиожности с требуеиой точностью определить точку отрыва из-за медленной сходимости представляющего его ряда в области $x > 1$.

Можно ожидать, что если построить решение уравнения (5) в виде функционального ряда по отрицательным степеням переменной $x$, то он в области $x > 1$ будет сходиться существенно быстрее.

Для этого произведем замену $x = a\xi/(\xi - 1)$ $(\xi = x/(x + a),\ a > 0)$. При этом $\xi = 1 - a/(x + a)$, $dx/d\xi = a/(\xi - 1)^2$, $x\, d\xi/dx = (a\xi/(\xi - 1))(dx/d\xi)^{-1} = \xi(\xi - 1)$. Так как $\varphi'(x) = \widetilde{\varphi}'(\xi)(d\xi/dx)$, то $x\varphi'(x) = \xi(1 - \xi)\widetilde{\varphi}'(\xi)$ $(\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(\xi))$. Точно так же $x(F_\eta F_{x\eta} - F_x F_{\eta\eta}) = \xi(\xi - 1)(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta})$.

Уравнение (6) представится в виде

$$F_{\eta\eta\eta} = F_\eta^2 - 1 - F F_{\eta\eta} + \xi(\xi - 1)\widetilde{\varphi}'(\xi)\left(F_\eta^2 - 1 - \frac{1}{2} F F_{\eta\eta}\right) + \xi(\xi - 1)(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}). \quad (7)$$

Задавая функцию $\widetilde{\varphi}'(\xi)$ в виде $\widetilde{\varphi}'(\xi) = \sum_{i=2}^N b_i \xi^i$ $(N \geqslant 2)$, решение уравнения (7) можно построить в виде функционального ряда $F(\xi, \eta) = f_0(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \xi^3 f_3(\eta) + \cdots = \xi^\alpha f_\alpha(\eta)$ $(\alpha = 0, 2, 3, \ldots)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 741 с.
2. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962, 479 с.
3. *Хайретдинов Э Ф.* Новые точные решения уравнений пограничного слоя. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 570–572.
4. *Шкадов В Я.* Об интегрировании уравнений пограничного слоя. — Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4, с. 730–732.