Я. Е. Ромм, С. Г. Буланов (Таганрог, ТГПИ). **Компьютерный анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений.**

Рассматривается задача Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y, \quad Y(t_0) = Y_0. \tag{1}$$

Предполагается, что для (1) выполнены все условия существования и единственности решения в области $R = \{t_0 \leqslant t < \infty, \widetilde{Y}(t), Y(t)\colon \|\widetilde{Y}_0 - Y_0\| \leqslant \delta, \delta > 0\}$. При этом элементы матрицы коэффициентов a_{ij} $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ определены, непрерывны и непрерывно дифференцируемы в R. Требуется исследовать решение (1) на устойчивость в смысле Ляпунова.

Рассматривается метод Эйлера разностного решения системы (1) $Y_{i+1} = (E + hA(t_i))Y_i$, $i = 0,1,\ldots$, с равномерным шагом h, E — единичная матрица. Для возмущенного решения имеем $\widetilde{Y}_{i+1} = (E + hA(t_i))\widetilde{Y}_i$. При любом выборе $t = \mathrm{const}$, $t \in [t_0, \infty)$, шаг h и i всегда предполагаются связанными соотношениями

$$t = t_{i+1}, \quad h = \frac{t_{i+1} - t_0}{i+1}, \qquad i = 0,1,\ldots \tag{2}$$

Возмущение примет вид $\widetilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = (E + hA(t_i))(\widetilde{Y}_i - Y_i) + Q_{Ei}$, где для канонической нормы вектора выполнено $\|Q_{Ei}\| \leqslant c_1 h^2$, $c_1 = \mathrm{const}$ [1]. Поэтому

$$\widetilde{Y}_{i+1} - Y_{i+1} = \prod_{l=0}^{i} (E + hA(t_{i-l}))(\widetilde{Y}_0 - Y_0) + L_i, \tag{3}$$

где $L_i = \sum_{k=1}^{l} \prod_{l=0}^{i-k} (E + hA(t_{i-l}))Q_{Ek-1} + Q_{E_i}$. Справедлива следующая лемма [1].

Лемма. *В рассматриваемых условиях верно соотношение* $\lim_{h\to 0} L_i = \vec{0}$.

Предельный переход в равенстве (3) влечет за собой выражение возмущения в виде

$$\widetilde{Y}(t) - Y(t) = \lim_{i\to\infty} \prod_{l=0}^{i} (E + hA(t_{i-l}))(\widetilde{Y}_0 - Y_0) \tag{4}$$

для любого t из (2). Из (4) вытекает следующая теорема.

Теорема. *Чтобы в рассматриваемых условиях система* (1) *была устойчива, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$\left\| \lim_{i\to\infty} \prod_{l=0}^{i} (E + hA(t_{i-l})) \right\| \leqslant \widetilde{e} = \mathrm{const} \tag{5}$$

для любого $t \in [t_0, \infty)$. *Система асимптотически устойчива, когда выполнено* (5) *и имеет место соотношение* $\| \lim_{i\to\infty} \prod_{l=0}^{i} (E + hA(t_{i-l}))\| \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Вычисление левой части (5) можно запрограммировать в виде цикла, который определяет компьютерный анализ устойчивости по значению нормы частичного произведения матриц. Численный эксперимент, иллюстрирующий это положение, представлен в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буланов С. Г.* Разработка и исследование методов программного моделирования устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе матричных мультипликативных преобразований разностных схем. Автореферат дисс. на соискание уч. ст. канд. техн. наук. Таганрог: ТРТУ, 2006, 20 с.