Н. М. Япарова (Челябинск, ЮУрГУ). **Об оптимальности по порядку регуляризованного решения одной обратной задачи физики твердого тела.**

При решении практических задач большое внимание уделяется выбору оптимального метода. В том случае, когда построение оптимального метода является трудновыполнимой задачей, вместо оптимального метода используют метод, имеющий тот же порядок погрешности, что и оптимальный, т. е. применяют метод, оптимальный по порядку. Для решения обратной задачи физики твердого тела восстановления энергетического спектра кристаллов по теплоемкости была получена точная по порядку оценка погрешности регуляризованного решения.

Связь энергетического спектра кристалла с его теплоемкостью описывается интегральным уравнением первого рода

$$Kn(\varepsilon) = \int_0^\infty S\left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)\frac{\varepsilon}{\theta}n(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{C(\theta)}{\theta}, \tag{1}$$

где $S(x) = x^2/(2\mathrm{sh}^2(x/2))$, $C(\theta)$ — теплоемкость системы, $\theta = kT$, T — абсолютная температура, а k — константа, определяемая системой, $n(\varepsilon)$ — спектральная плотность, удовлетворяющая условиям $\|n(\varepsilon)\|_{W_2^1[0;\infty)} \leqslant r^2$, $n(0) = 0$, $\int_0^\infty n(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1$.

Если $C(\theta)/\theta$ и $n(\varepsilon) \in L_2[0,\infty)$, то уравнение (1) становится некорректной задачей. Кроме того, вместо $C(\theta)$ известны такие $C_\delta(\theta)$ и $\delta > 0$, что $\|C_0(\theta)/\theta - C_\delta(\theta)/\theta\| \leqslant \delta$.

Уравнение (1) при помощи метода регуляризации может быть сведено к вариационной задаче

$$\inf_{n(\varepsilon)}\left\{\left\|Kn(\varepsilon) - \frac{C_\delta(\theta)}{\theta}\right\|^2 + \alpha\int_0^\infty \frac{n^2(\varepsilon)}{\varepsilon}\,d\varepsilon + \alpha\int_0^\infty [n'(\varepsilon)]^2\varepsilon\,d\varepsilon \,\Big|\, n(\varepsilon) \geqslant 0,\ \int_0^\infty n(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1\right\}, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$ — некоторый параметр регуляризации.

Выберем параметр регуляризации α из условия невязки $\|Kn(\varepsilon) - C_\delta(\theta)/\theta\|^2 = \delta^2$, и обозначим $\alpha = \overline{\alpha}(\delta)$ решение этого уравнения.

Доказано, что при $\alpha = \overline{\alpha}(\delta)$ задача (2) имеет единственное решение $n_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\varepsilon)$, которое является регуляризованным решением уравнения (1).

Для регуляризованного решения $n_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\varepsilon)$ получена следующая оценка: $\|n_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\varepsilon) - n(\varepsilon)\| \leqslant c\ln^{-1}(1/\delta)$, $c = \mathrm{const}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифшиц И. М.* Об определении энергетического спектра бозе-системы по ее теплоемкости. — ЖЭТФ, 1954, т. 26, № 5, с. 551–556.
2. *Танана В. П.* Об оптимизации методов регуляризации при решении вырожденных операторных уравнений. — Изв. ВУЗов. Математика, 1985. № 9, с. 75–76.
3. *Лаврентьев М. М.*, *Савельев Л. Я.* Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1999, 702 с.