И. В. Барышева (Липецк, ЛГПУ). **О квадратурно-кубатурном методе решения уравнений с частными интегралами.**

Различные прикладные задачи приводятся к частным случаям уравнения

$$(I-K)x=f, \tag{1}$$

где I — тождественный оператор, $K=P+Q+R$, операторы P, Q, R определяются равенствами

$$(Px)(t,s)=\int_a^b p(t,s,\tau)x(\tau,s)\,d\tau, \quad (Qx)(t,s)=\int_c^d q(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma, \tag{2}$$

$$(Rx)(t,s)=\int_a^b\int_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)\,d\tau d\sigma, \tag{3}$$

$t,\tau\in[a,b]$, $s,\sigma\in[c,d]$, $c(t,s)$, $l(t,s,\tau)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ и $f(t,s)$ — заданные измеримые по совокупности переменных функции, а интегралы понимаются в смысле Лебега. Явное построение решений таких уравнений возможно лишь в редких случаях, поэтому важное значение имеют численные методы решения. Свойства уравнения (1) и его приложения изучались в [1].

Пусть ядра $p(t,s,\tau)$, $q(t,s,\sigma)$, $r(t,s,\tau,\sigma)$ и функция $f(t,s)$ непрерывны по совокупности переменных. Тогда оператор K непрерывен в пространстве $C(D)$.

На прямоугольнике D рассмотрим равномерную сетку (t_i,s_j) $(i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m)$. При численном решении уравнения (1) частные интегралы (2) вычисляются по квадратурным формулам

$$\begin{aligned}(Px)(t,s)&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p(t,s,t_i)x(t_i,s)+\varrho_1(t,s)\equiv(\widetilde{P}x)(t,s)+\varrho_1(t,s),\\ (Qx)(t,s)&=\sum_{j=1}^{m}\beta_j q(t,s,s_j)x(t,s_j)+\varrho_2(t,s)\equiv(\widetilde{Q}x)(t,s)+\varrho_2(t,s),\end{aligned} \tag{4}$$

а двойной интеграл (3) — по кубатурной формуле

$$(Rx)(t,s)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j r(t,s,t_i,s_j)x(t_i,s_j)+\varrho_3(t,s)\equiv(\widetilde{R}x)(t,s)+\varrho_3(t,s) \tag{5}$$

с остаточными членами $\varrho_1(t,s)$, $\varrho_2(t,s)$, $\varrho_3(t,s)$ и положительными коэффициентами α_i, β_j. Тогда $(Kx)(t,s)=(\widetilde{K}x)(t,s)+\varrho(t,s)$, где $(\widetilde{K}x)(t,s)=(\widetilde{P}x)(t,s)+(\widetilde{Q}x)(t,s)+(\widetilde{R}x)(t,s)$, $\varrho(t,s)=\varrho_1(t,s)+\varrho_2(t,s)+\varrho_3(t,s)$.

Заменив интегралы в уравнении (1) по формулам (4) и (5) и отбросив остаточный член, получим приближ°нное уравнение $\widetilde{x}=\widetilde{K}\widetilde{x}+f$. Подставив в него вместо (t,s) узлы расчетной сетки (t_i,s_j) $(i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m)$, заменим матричные представления значений неизвестной функции $\widetilde{x}(t_i,s_j)$ и функции $f(t_i,s_j)$ на векторные представления $\widetilde{\mathbf{x}}=\{\widetilde{x}_u\}$ и $\mathbf{f}=\{f_u\}$ соответственно с индексом $u=(i-1)m+j$, где при каждом $i=1,\dots,n$ индекс $j=1,\dots,m$. Тогда вектор-столбцы $\{\widetilde{x}_u\}$ и $\{f_u\}$ составлены из выписываемых последовательно строк соответствующих матриц. Получим систему nm линейных уравнений относительно nm неизвестных значений функции $\widetilde{x}(t_i,s_j)$. Пусть определитель системы $\Delta\neq 0$, тогда система имеет единственное решение. В результате численного решения системы получим вектор $\widetilde{\mathbf{x}}=\{\widetilde{x}_u\}$, координаты которого определяются равенствами $\widetilde{x}_u=\Delta^{-1}\sum_{v=1}^{nm}\Delta_{uv}f_v$ $(u=(i-1)m+j)$, где Δ_{uv} — алгебраическое дополнение элемента определителя Δ с индексами u и v. Пусть

$$\varrho_\varphi = \max_{t,s} |\varrho_\varphi(t,s)| \leqslant \max_{(t,s)} \Bigg[\Bigg| \int_a^b p(t,s,\tau_1)\varphi(\tau_1,s)d\tau_1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i p(t,s,t_i)\varphi(t_i,s) \Bigg| + \Bigg| \int_c^d q(t,s,\sigma_1)\varphi(t,\sigma_1)d\sigma_1 - \sum_{j=1}^m \beta_j q(t,s,s_j)\varphi(t,s_j) \Bigg| + \Bigg| \int_a^b \int_c^d r(t,s,\tau_1,\sigma_1)\varphi(\tau_1,\sigma_1)d\sigma_1\, d\tau_1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i\beta_j r(t,s,t_i,s_j)\varphi(t_i,s_j) \Bigg| \Bigg], \quad (6)$$

где $\varphi(t,s)$ — одна из функций:

$$f(t,s), \quad \int_a^b p(t,s,\tau)\,d\tau, \quad \int_c^d q(t,s,\sigma)\,d\sigma, \quad \int_a^b\int_c^d r(t,s,\tau,\sigma)\,d\sigma\,d\tau.$$

Для погрешности решения получена оценка $|\varepsilon_u| = |x_u - \widetilde{x}_u| \leqslant B(\varrho_f + H(\varrho_p + \varrho_q + \varrho_r) + H_tK_1 + H_sK_2)$ $(u = (i-1)m + j,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m)$, где $B \geqslant |\Delta|^{-1}\sum_{v=1}^{nm}|\Delta_{uv}|$ $(u = (i-1)m + j)$, $H = \max_{(t,s)}|x(t,s)|$, $H_t = \max_s\max_i|x(t_{i-1},s) - x(t_i,s)|$, $H_s = \max_t\max_j|x(t,s_{j-1}) - x(t,s_j)|$, $K_1 = \max_{(t,s)}\int_a^b[\int_c^d|q(t,s,\sigma_1)p(t,\sigma_1,\tau)|d\sigma_1\,d\tau + \int_a^b\int_c^d|r(t,s,\tau_1,\sigma_1)p(\tau_1,\sigma_1,\tau)|\,d\sigma_1\,d\tau_1]\,d\tau$, $K_2 = \max_{(t,s)}\int_c^d[\int_a^b|p(t,s,\tau_1)q(\tau_1,s,\sigma)|\,d\tau_1\,d\tau + \int_a^b\int_c^d|r(t,s,\tau_1,\sigma_1)q(\tau_1,\sigma_1,\sigma)|\,d\sigma_1\,d\tau_1]\,d\sigma$, а оценки ϱ_f, ϱ_p, ϱ_q, ϱ_r получены из (6) при соответствующем выборе функции φ.

В вычислительном процессе квадратурно-кубатурного метода узлы (t_i, s_j), коэффициенты формул (4), (5) и все величины, зависящие от них, будут некоторыми функциями от n и m. Тогда

$$(Kx)(t,s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(n)p(t,s,t_i(n))\,x(t_i(n),s) + \sum_{j=1}^m \beta_j(m)q(t,s,s_j(m))x(t,s_j(m)) + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \alpha_i(n)\beta_j(m)r(t,s,t_i(n),s_j(m))x(t_i(n),s_j(m)) + \varrho(t,s,n,m). \quad (7)$$

Теорема. *Пусть уравнение* (1) *обратимо,* $x(t,s)$ *— его единственное решение и для вычислительного процесса квадратурно-кубатурного метода, определяемого равенством* (7), *выполняются условия:* 1) *погрешности* $\varrho_f(t,s,n,m)$, $\varrho_p(t,s,n,m)$, $\varrho_q(t,s,n,m)$ *и* $\varrho_r(t,s,n,m)$ *правила* (7) *для функций* $x(t,s) = f(t,s)$, $x(t,s) = \int_a^b p(t,s,\tau)\,d\tau$, $x(t,s) = \int_c^d q(t,s,\sigma)\,d\sigma$ *и* $x(t,s) = \int_a^b\int_c^d r(t,s,\tau,\sigma)\,d\tau\,d\sigma$ *таковы, что* $B(n,m)\varrho_f(t,s,n,m) \to 0$ *и* $B(n,m)(\varrho_p(t,s,n,m) + \varrho_q(t,s,n,m) + \varrho_r(t,s,n,m)) \to 0$ *при* $n,m \to \infty$ *равномерно относительно* t, s, n, m; 2) $B(n,m)H_t(n)K_1 \to 0$, $B(n,m)H_s(m)K_2 \to 0$ *при* $n,m \to \infty$ *равномерно относительно* t, s, n, m.

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ *существует такое* $N(\varepsilon)$, *что при* $n,m > N(\varepsilon)$ *будут выполняться неравенства* $|x(t_i,s_j) - \widetilde{x}(t_i,s_j)| < \varepsilon$ $(i = 1,\dots,,n,\ j = 1,\dots,m)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калитвин А. С.* Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000, 252 с.