Р. А. О г а н я н (Москва, МГОУ). **Прообразы комбинаторных формул.**

Кумиру моей юности и учителю
Сергею Никитовичу Мергеляну, 1928–2008.

Соотношение между множествами, из которого — при переходе к мощностям или иной мере (длинам, площадям, …) — следует скалярная формула, мы называем *прообразом* последней [1]. Задача: найти прообраз подобный образу.

1. **Подстановки** $S_{k_1,\ldots,k_m}$**.** Пусть $K_i = \{\sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1, \ldots, \sum_{j=1}^{i-1} k_j + k_i\}$, $\sum_{j=1}^{0} k_j \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $\to |K_i| = k_i$. Рассмотрим разбиение $\{1,\ldots,n\} = \cup_{i=1}^{m} K_i \iff n = k_1 + \cdots + k_m$. Пусть $S_{k_1,\ldots,k_m}$ — множество всех подстановок $s = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \ldots & n \\ s_1 & \ldots & s_n \end{smallmatrix}\right)$, во второй строчке которых номера — из каждого K_i — расположены в возрастающем порядке. П р и м е р. $n=4$, $m=3$, $k_1=2$, $k_2=k_3=1 \to \{1,2,3,4\} = \{1,2\}\cup\{3\}\cup\{4\}$, $\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 4&1&3&2 \end{smallmatrix}\right) \in S_{2,1,1}$.

Пусть $\mathcal{P}(1^{k_1}\cdots m^{k_m})$ — множество всех векторов $(x_1,\ldots,x_n)$, где $n = \sum_{i=1}^{m} k_i$, координаты которых — перестановки мультимножества $\langle 1^{k_1}\ldots m^{k_m}\rangle$. Определим *отображение* F: $\mathcal{P}(1^{k_1}\cdots m^{k_m}) \to S_{k_1,\ldots,k_m}$ алгоритмом: вместо всех координат вектора $x = (x_1,\ldots,x_m)$, равных i — во вторую строчку подстановки $s = Fx$ вписать последовательно номера из K_i $(i = 1,\ldots,m)$: $s_i = \sum_{j=1}^{x_i - 1} k_j + \sum_{k=1}^{i} \delta_{x_i x_k}$, $i = 1,\ldots,n$. П р и м е р. $x = (1,2,1,3) \in \mathcal{P}(1^2 2^1 3^1)$, $Fx = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&3&2&4 \end{smallmatrix}\right) \in S_{2,1,1}$.

Заметим, что $1^{k_1}\cdots m^{k_m} = (\underbrace{1,\ldots,1}_{k_1},\ldots,\underbrace{m,\ldots,m}_{k_m})$, причем, если $k_i = 0$, то координата i в этом векторе отсутствует [2]. Оказывается, $F^{-1}s = s\,1^{k_1}\cdots m^{k_m}$. П р и м е р. $s = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&3&2&4 \end{smallmatrix}\right) \in S_{2,1,1}$, $F^{-1}s = s\,1^2 2^1 3^1 = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&3&2&4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&1&2&3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1&2&3&4 \\ 1&2&1&3 \end{smallmatrix}\right) = (1,2,1,3) \in \mathcal{P}(1^2 2^1 3^1)$; F — взаимно однозначное отображение, поэтому $|S_{k_1,\ldots,k_m}| = |\mathcal{P}(1^{k_1}\cdots m^{k_m})| = (k_1+\cdots+k_m)!/(k_1!\cdots k_m!)$ и $\mathcal{P}(1^{k_1}\cdots m^{k_m}) = \cup_{s\in S_{k_1,\ldots,k_m}} s\,1^{k_1}\cdots m^{k_m}$.

2. **Прообраз формулы** $m^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} n!/\prod_{i=1}^{m} k_i!$. Рассмотрим n-мерный m-значный куб $\{(x_1,\ldots,x_n)\colon\ x_i = 1,\ldots,m\} = \{1,\ldots,m\}^n$. Легко видеть, что $\{1,2\}^2 = \begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\left\{\begin{smallmatrix} 1&1&2&2 \\ 1&2&1&2 \end{smallmatrix}\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{smallmatrix} 1&2 \\ 2&1 \end{smallmatrix}\right\} \cup \left\{\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right\} = \mathcal{P}(1^2 2^0) \cup \mathcal{P}(1^1 2^1) \cup \mathcal{P}(1^0 2^2) = \cup_{k_1+k_2=2,\, k_i=0,1,2} \mathcal{P}(1^{k_1} 2^{k_2})$, $|\{(k_1,\ldots,k_m)\colon \sum_{i=1}^{m} k_i = n,\ k_i = 0,\ldots,n\}| = (m+n-1)!/((m-1)!\,n!)$, $|\{1,\ldots,m\}^m| = m^n$, $\sum_{i=1}^{m} k_i = n \to \mathcal{P}(1^{k_1}\cdots m^{k_m}) \subset \{1,\ldots,m\}^n$.

Два вектора **эквивалентны**, если координаты одного — перестановка координат другого.

Теорема 1. *n-мерный m-значный куб содержит: m^n векторов (точек), $(m+n-1)!/((m-1)!\,n!)$ классов эквивалентных векторов $\mathcal{P}(1^{k_1}\cdots m^{k_m})$, где $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$, каждый из которых содержит $n!/(k_1!\cdots k_m!)$ векторов соответственно, и формула его разбиения на классы эквивалентности имеет вид:*

$$\{1,\ldots,m\}^n = \bigcup_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_i=0,\ldots,n}} \mathcal{P}(1^{k_1}\cdots m^{k_m}).$$

Отсюда — при переходе к мощностям — следует известное тождество (из заголовка этого пункта) с его новой геометрической интерпретацией.

3. **Прообраз полиномиальной формулы.** Пусть $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\} = \cup_{i=1}^{p} A_i$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $|A_i| = a_i \to m = \sum_{i=1}^{p} a_i$. Рассмотрим p-арное разбиение n-мерного m-

значного куба: $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}^n = (A_1 \cup \cdots \cup A_p)^n$. Легко видеть, что

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_p)^n = \bigcup_{x \in \{1,\ldots,p\}^n} \prod_{i=1}^{n} A_{x_i} = \bigcup_{\substack{r_1+\cdots+r_p=n,\\ r_i=0,\ldots,n}} \; \bigcup_{x \in \mathcal{P}(1^{r_1}\cdots p^{r_p})} \prod_{i=1}^{n} A_{x_i}\,,$$

$$s\,1^{r_1}\cdots p^{r_p} = (x_1,\ldots,x_n) \;\longleftrightarrow\; s\,A_1^{r_1}\cdots A_p^{r_p} = \prod_{i=1}^{n} A_{x_i} \quad \Bigl(s \in S_{r_1,\ldots,r_p},\; n = \sum_{i=1}^{p} r_i\Bigr),$$

$$\bigcup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{P}(1^{r_1}\cdots p^{r_p})} \prod_{i=1}^{n} A_{x_i} = \bigcup_{s\in S_{r_1,\ldots,r_p}} s\,A_1^{r_1}\cdots A_p^{r_p}\,.$$

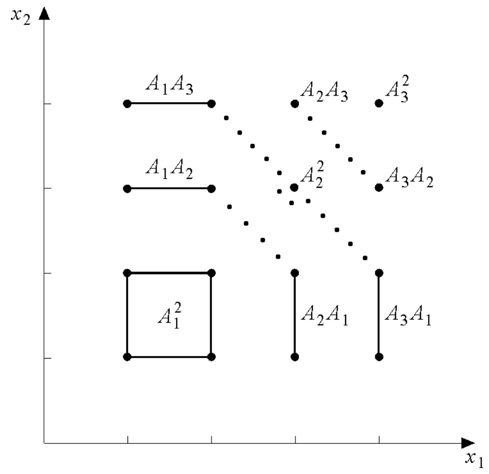
Два блока p-арного разбиения куба $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_m\}^n$ — $\prod_{i=1}^n A_{x_i}$ и $\prod_{i=1}^n A_{y_i}$ — эквиваленты, если они содержат одинаковое количество A_i $(i = 1,\ldots,p)$; $\cup_{x_1,\ldots,x_n\in\mathcal{P}(1^{r_1}\cdots p^{r_p})} \prod_{i=1}^n A_{x_i}$ — класс блоков, эквивалентых блоку $A_1^{r_1}\cdots A_p^{r_p}$ (если $r_i = 0$, то A_i в $\prod_{i=1}^p A_i$ отсутствует, например, $A_1^3 A_2^0 \overset{\text{def}}{=} A_1^3$).

Теорема 2. *p-арное разбиение n-мерного m-значного куба содержит: p^n блоков, $(p+n-1)!/((p-1)!\,n!)$ классов эквивалентных блоков, каждый из которых содержит $n!/(r_1!\cdots r_p!)$ блоков, а каждый блок — $a_1^{r_1}\cdots a_p^{r_p}$ векторов (точек) соответственно. Его можно выразить через систему представителей $\{A_1^{r_1}\cdots A_p^{r_p}\}$ классов эквивалентности:*

$$\Bigl(A_1 \bigcup \cdots \bigcup A_p\Bigr)^n = \bigcup_{\substack{r_1+\cdots+r_p=n,\\ r_i=0,\ldots,n}} \; \bigcup_{s\in S_{r_1,\ldots,r_p}} s\,A_1^{r_1}\cdots A_p^{r_p}\,.$$

Отсюда — при переходе к мощностям — следует полиномиальная формула для $a_i \in \mathbf{N}$. (В случае сплошного куба — при переходе к длинам $\widehat{A}_i$ [3] — мы получим полиномиальную формулу для $a_i \in \mathbf{R}_+$. Векторы блока $\prod_{i=1}^n A_{x_i}$ — координаты вершин параллелепипеда $\prod_{i=1}^n \widehat{A}$, его объем для $x \in \mathcal{P}(1^{r_1}\cdots p^{r_p})$ равен $\prod_{i=1}^p \widehat{A}_i^{r_i}$, а вероятность попадания СВ в него — $\prod_{i=1}^p \widehat{A}_i^{r_i}/(\sum_{i=1}^p \widehat{A}_i)^n$.)

4. **Иллюстрации.** Пусть $n = 2$, $m = 4$, $p = 3$; $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_4\} = \{1,\ldots,4\}$, $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4\}$; $s' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $s'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^2 = \{1,2,3,4\}^2$, $\{(r_1,r_2,r_3)\colon\; r_1+r_2+r_3 = 2,\; r_i = 0,1,2\} = \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \left\{\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right\}$, $\mathcal{P}(1^2 2^0 3^0) = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right\}$, $\ldots$, $\mathcal{P}(1^0 2^1 3^1) = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \left\{\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{array}\right\}$, $S_{2,0,0} = S_{0,2,0} = S_{0,0,2} = \{s'\}$, $S_{1,1,0} = S_{1,0,1} = S_{0,1,1} = \{s', s''\}$, $A_1^2 A_2^0 A_3^0 = A_1^2 = \{1,2\}^2 = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \left\{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right\}$, $\ldots$, $A_1^0 A_2^1 A_3^1 = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \left\{\begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}\right\}$, $s''\,A_1 A_2 = s''\left\{\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{array}\right\} = \{s''(1,3), s''(2,3)\} = \left\{\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right\} = A_2 A_1$, $\cup_{r_1+r_2+r_3,\, r_i=0,1,2} \cup_{s\in S_{r_1,r_2,r_3}} s\,A_1^{r_1} A_2^{r_2} A_3^{r_3} = A_1^2 \cup A_2^2 \cup A_3^2 \cup (A_1 A_2 \cup A_2 A_1) \cup (A_1 A_3 \cup A_3 A_1) \cup (A_2 A_3 \cup A_3 A_2) = \{1,2,3,4\}^2$; 16 точек, 9 блоков и 6 классов эквивалентных блоков.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оганян Р. А.* Комбинаторные множества. — Вестник МГОУ, сер. физ.-матем., 2005, № 7, с. 129–148.
2. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1982, с. 18–20, 35–36.
3. *Оганян Р.А.* Бинарное разбиение куба. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 1, с. 84–86.