О. В. Кузьмин, А. В. Маликов (Иркутск, ИГУ). **Проблема Райзера и комбинаторные полиномы разбиений.**

Понятие «полином разбиения» — полином от нескольких переменных, определяемый с помощью суммы по различным разбиениям его индекса — введено Беллом; один из полиномов разбиений, возникающий при получении явного вида n-й производной от композиции функций — формулы ди Бруно, Риордан в книге [3] назвал *полиномом Белла* $Y_n(f; g_1, \ldots, g_n)$. Коэффициенты полинома Белла Y_n — *однородные* полиномы Белла $A_{n,k}(g)$ — имеют вид

$$A_{n,k}(g) = n! \sum_{n,k} \prod_{i=1}^{n-k+1} \frac{g_i^{r_i}}{r_i!(i!)^{r_i}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $g = (g_1, g_2, \ldots)$ — формальные переменные, а суммирование ведется по всем таким наборам $(r_1, r_2, \ldots, r_{n-k+1})$ неотрицательных целых чисел, что

$$r_1 + 2r_2 + \cdots + (n-k+1)r_{n-k+1} = n, \quad r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-k+1} = k,$$

т. е. по всем разбиениям натурального n на k натуральных слагаемых.

Известно (см., например, [1]), что

$$\sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(g) = \sum_{j=0}^{n-1} g_{j+1} \binom{n-1}{j} \sum_{k=1}^{n-j} A_{n-j-1,k-1}(g). \tag{1}$$

Рассмотрим (0,1)-матрицу A' размера $m \times n$. Пусть R — вектор строчных сумм, а S — вектор столбцевых сумм матрицы A'. Следуя [4], будем говорить, что матрица A принадлежит *классу Райзера* $\mathfrak{A}^{m,n}(R, S)$, если вектор ее строчных сумм совпадает с R, а вектор столбцевых сумм совпадает с S. При $m = n$ и $S = R = (k, k, \ldots, k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, класс $\mathfrak{A}^{m,n}(R, S)$ будем обозначать $\mathbf{R}_k(n)$. Очевидно, что $\mathbf{R}_1(n)$ есть множество перестановочных матриц. Элементы класса $\mathbf{R}_k(n)$ будем называть *матрицами Райзера.*

Матрицы $A, B \in \mathbf{R}_k(n)$ назовем *перестановочно эквивалентными* [4], если существуют такие $P, Q \in \mathbf{R}_1(n)$, что $B = P^{-1}AQ$. Назовем матрицу $A \in \mathbf{R}_k(n)$ *разложимой* [2], если A перестановочно эквивалентна матрице вида $A' = \begin{pmatrix} C & O' \\ O & D \end{pmatrix}$, где O и O' суть нулевые матрицы, и, кроме того, $C \in \mathbf{R}_k(q)$ и $D \in \mathbf{R}_k(p)$. Матрица Райзера, не являющаяся разложимой, называется *вполне неразложимой* [2].

Матрицу $B \in \mathbf{R}_k(n)$ назовем *l-разложимой*, если она перестановочно эквивалентна матрице вида

$$B' = \operatorname{diag}[A_1, A_2, \ldots, A_l], \tag{2}$$

где $A_i \in \mathbf{R}_k(n_i)$, A_i вполне неразложимы, $i = 1, 2, \ldots, l$, и $n_1 + n_2 + \cdots + n_l = n$.

Будем говорить, что разложение (2) соответствует разбиению $n = \sum_{i=1}^{n-l+1} ir_i$ числа n на l натуральных слагаемых, если для некоторой подстановки $\sigma \in S_{n-l+1}$ среди матриц $\{A_1, \ldots, A_l\}$ есть ровно $r_{\sigma(i)}$ матриц порядка $\sigma(i)$, $i \in N_{n-l+1}$. Заметим, что две матрицы, соответствующие разным разбиениям числа n, не являются перестановочно эквивалентными.

Множество всех l-разложимых матриц класса $\mathbf{R}_k(n)$ обозначим $\mathbf{R}_k^l(n)$. Очевидно, что

$$|\mathbf{R}_k(n)| = \sum_{l=1}^{n} |\mathbf{R}_k^l(n)|.$$

Теорема 1. *Для мощности множества* $\mathbf{R}_k^l(n)$ *справедливо соотношение*

$$|\mathbf{R}_k^l(n)| = (n!)^2 \sum_{n,l} \prod_{i=1}^{n-l+1} \frac{|\mathbf{R}_k^1(i)|^{r_i}}{r_i!\,(i!)^{2r_i}}.$$

Доказательство. Зафиксируем разбиение $n = \sum_{i=1}^{n-l+1} ir_i$ числа n на l натуральных слагаемых. В развернутой записи выражения $\sum_{i=1}^{n-l+1}\sum_{j=1}^{r_i} i$ обозначим k-е ненулевое слагаемое n_k, $k \in N_l$. Построим все возможные матрицы, соответствующие этому разбиению.

Для этого выберем r_i матриц из $\mathbf{R}_k^1(i)$, образовав множество R_i. Это можно сделать $|\mathbf{R}_k^1(i)|^{r_i}/r_i!$ способами. Построим матрицу A, перестановочно эквивалентную (2), где $\{A_1, A_2, \ldots, A_l\} = \cup_{i=1}^{n-l+1} R_i$. Это возможно

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_l}^2 = (n!)^2 \prod_{i=1}^{n-l+1} \frac{1}{(i!)^{2r_i}}$$

способами. Поэтому для данного фиксированного разложения число соответствующих ему матриц Райзера равно

$$(n!)^2 \prod_{i=1}^{n-l+1} \frac{|\mathbf{R}_k^1(i)|^{r_i}}{r_i!\,(i!)^{2r_i}}.$$

Суммируя эти числа по всем разложениям n на l слагаемых и по всем возможным l, получаем доказываемую формулу.

Следствие. *Имеет место соотношение*

$$|\mathbf{R}_k(n)| = n! \sum_{l=1}^{n} n! \sum_{n,l} \prod_{i=1}^{n-l+1} \frac{|\mathbf{R}_k^1(i)|^{r_i}}{r_i!\,(i!)^{2r_i}} = n! \sum_{l=1}^{n} A_{n,l}(g),$$

где $g_i = |\mathbf{R}_k^1(i)|/i!$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что, в силу специфики рассматриваемых объектов, элементы g_i обладают следующим свойством:

$$g_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Теорема 2. *Для чисел* $|\mathbf{R}_k(n)|$ *и* $|\mathbf{R}_k^1(n)|$ *справедливо рекуррентное соотношение*

$$|\mathbf{R}_k(n)| = \sum_{j=k}^{n-k} \binom{n}{j}\binom{n-1}{j-1} |\mathbf{R}_k^1(j)|\,|\mathbf{R}_k(n-j)|.$$

Доказательство. Из равенства (1) следует, что

$$n! \sum_{l=1}^{n} A_{n,l}(g) = n! \sum_{j=0}^{n-1} g_{j+1} \binom{n-1}{j} \sum_{l=1}^{n-j} A_{n-j-1,l-1}(g).$$

С учетом следствия, формулы (3) и того факта, что $A_{s,s}(g) = 0$ $(s \in N_n)$ при рассматриваемом g, получаем:

$$|\mathbf{R}_k(n)| = n! \sum_{j=k-1}^{n-k-1} \frac{|\mathbf{R}_k^1(j+1)|}{(j+1)!} \binom{n-1}{j} \frac{|\mathbf{R}_k(n-j-1)|}{(n-j-1)!}.$$

Переопределив пределы суммирования, приходим к доказываемому соотношению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмин О. В.* Обобщенные пирамиды Паскаля и их приложения. Новосибирск: Наука, 2000.
2. *Райзер Г. Дж.* Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.
3. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.
4. *Сачков В. Н.*, *Тараканов В. Е.* Комбинаторика неотрицательных матриц. М.: ТВП, 2000.