В. К. Доманский (Санкт-Петербург, СПбЭМИ РАН). **Разложение распределений на решетке $\mathbf{Z}^2$ и модели биржевых торгов.**

В работе [1] было введено «каноническое» представление множества $\Theta(r)$ вероятностных распределений $\mathbf{p} = (p(u))_{u=0}^{\infty}$ на множестве неотрицательных целых чисел $\mathbf{Z}_+^1$ с конечным вторым моментом и с фиксированным целым математическим ожиданием $\mathbf{E}_{\mathbf{p}}[u] = r$, $r \in \mathbf{Z}_+^1$, как выпуклой оболочки своих крайних точек.

Множества $\Theta(r)$ являются замкнутыми выпуклыми подмножествами Банахова пространства $L^1(\{s^2\})$. Крайними точками множества $\Theta(r)$ являются распределения $\mathbf{p}^r(k,l) \in \Theta(r)$ с одноточечными и двухточечными носителями $\{r-l, r+k\}$:

$$p_{r-l}^r(k,l) = \frac{k}{k+l}, \quad p_{r+k}^r(k,l) = \frac{l}{k+l},$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$, $l = 0, 1, \ldots, r$, $k + l > 0$.

Имеет место равенство $\mathbf{p}^r(0,l) = \mathbf{p}^r(k,0) = \mathbf{e}^r$, где $\mathbf{e}^r$ «вырожденное распределение с одноточечным носителем $e_r^r = 1$.

В [1] показано, что любое распределение $\mathbf{p} \in \Theta(r)$ имеет следующее «каноническое» представление в виде выпуклой комбинации крайних точек множества $\Theta(r)$:

$$\mathbf{p} = p_r \cdot \mathbf{e}^r + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p}^r(k,l) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p}^r(k,l) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{r} \alpha_{kl}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{p}^r(k,l)$$

с коэффициентами

$$\alpha_{kl}(\mathbf{p}) = \frac{k+l}{\sum_{t=1}^{r} t p_{r-t}} p_{r-l} p_{r+k}.$$

Это представление было получено в ходе исследования модели многошаговых биржевых торгов однотипными рисковыми активами (акциями) между двумя различно информированными игроками. Перед началом торгов случайный ход выбирает ликвидную цену акций в соответствии с известным обоим игрокам вероятностным распределением. Выбор случая сообщается Игроку 1 и не сообщается Игроку 2. Затем, на каждом шаге торгов игроки одновременно называют свою цену акции. Назвавший более высокую цену покупает за эту цену одну акцию у противника. Игроки стремятся максимизировать цену своего итогового портфеля (деньги плюс ликвидная цена акций).

В рассматривавшейся модели ликвидная цена акции могла принимать произвольные неотрицательные целочисленные значения. Полученное представление вероятностных распределений позволило свести решение соответствующих этой модели игр к решению рассмотренных ранее в [2] игр с двумя возможными значениями цены акции.

В ходе исследования аналогичной модели биржевых торгов рисковыми активами (акциями) двух типов у нас возникла потребность в аналогичном представлении двухмерных вероятностных распределений. Построению такого представления посвящена данная заметка.

Мы рассматриваем множество $M^2(\mathbf{Z}^2)$ вероятностных распределений $\mathbf{p} = (p(u,v))$ на двумерной целочисленной решетке $\mathbf{Z}^2$ с конечными вторыми моментами

$$m_u^2[\mathbf{p}] = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} u^2 \cdot p(u,v) < \infty, \qquad m_v^2[\mathbf{p}] = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{v=-\infty}^{\infty} v^2 \cdot p(u,v) < \infty.$$

Множество M^2 является замкнутым выпуклым подмножеством банахова пространства $L^1(\{u^2+v^2\})$ отображений $\mathbf{l} : \mathbf{Z}^2 \to R^1$ с нормой

$$||\mathbf{l}|| = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \sum_{u=-\infty}^{\infty} |l(u,v)|(u^2+v^2).$$

Множества
$$\Theta(r,s)=\{\mathbf{p}:\mathbf{E}_{\mathbf{p}}[u]=r,\quad \mathbf{E}_{\mathbf{p}}[v]=s\},\quad (r,s)\in\mathbf{Z}^2,$$
где $\mathbf{E}_{\mathbf{p}}$ «математическое ожидание относительно распределения $\mathbf{p}$, являются замкнутыми выпуклыми подмножествами пространства $L^1(\{u^2+v^2\})$. Мы даем представление множества $\Theta(r,s)$ как выпуклой оболочки его крайних точек и разложение линейных функций на этом множестве соответствующее этому представлению.

Достаточно дать такое представление для множества $\Theta(0,0)$. Крайние точки множества $\Theta(0,0)$ «вырожденное распределение с одноточечным носителем и распределения с двух и трехточечными носителями. Для рассматриваемых финансовых моделей представляют интерес только распределения с трехточечными носителями. Поэтому мы предполагаем, что распределение $\mathbf{p}\in\Theta(0,0)$ имеет на каждом направлении нагрузку только на одном из лучей и может быть представлено как выпуклая комбинация распределений только с трехточечными носителями. Мы называем такие распределения распределениями класса $\mathcal{P}$.

Элементы u, v решетки $\mathbf{Z}^2$ мы записываем с помощью целых комплексных чисел $w=u+v\mathbf{i}$.

Пусть три точки $z_1=r_1\exp(\mathbf{i}\varphi_1)$, $z_2=r_2\exp(\mathbf{i}\varphi_2)$, $z_3=r_3\exp(\mathbf{i}\varphi_3)$, могут быть занумерованы так, что
$$0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\varphi_1+\pi<\varphi_3<2\pi. \tag{1}$$
Тогда существует распределение $\mathbf{p}^0(z_1,z_2,z_3)\in\Theta(0,0)$ с трехточечным носителем (z_1,z_2,z_3). Распределение $\mathbf{p}^0(z_1,z_2,z_3)\in\Theta(0,0)$ определяется вероятностями
$$p^0(z_1)=\frac{\mathrm{Im}\,(z_3\cdot\bar z_2)}{\mathrm{Im}\,(z_2\cdot\bar z_1+z_3\cdot\bar z_2+z_1\cdot\bar z_3)},$$
$$p^0(z_2)=\frac{\mathrm{Im}\,(z_1\cdot\bar z_3)}{\mathrm{Im}\,(z_2\cdot\bar z_1+z_3\cdot\bar z_2+z_1\cdot\bar z_3)},$$
$$p^0(z_3)=\frac{\mathrm{Im}\,(z_2\cdot\bar z_1)}{\mathrm{Im}\,(z_2\cdot\bar z_1+z_3\cdot\bar z_2+z_1\cdot\bar z_3)}.$$
Обозначим через Δ^0 множество троеточий (z_1,z_2,z_3), для которых выполнено (1), а через $\Delta^0(w)$ множество двоеточий (z_2,z_3), для которых три числа (w,z_2,z_3) могут быть занумерованы так, что будет выполнено (1).

Теорема. *Распределение* $\mathbf{p}\in\Theta(0,0)$ *класса* $\mathcal{P}$ *имеет следующее представление в виде выпуклой комбинации крайних точек с трехточечными носителями*:
$$\mathbf{p}=\sum_{(z_1,z_2,z_3)\in\Delta^0}\alpha(\mathbf{p},z_1,z_2,z_3)\cdot\mathbf{p}^0(z_1,z_2,z_3), \tag{2}$$
с коэффициентами
$$\alpha(\mathbf{p},w_1,w_2,w_3)=\frac{\mathrm{Im}\,(w_2\cdot\bar w_1+w_3\cdot\bar w_2+w_1\cdot\bar w_3)}{\sum_{(z_2,z_3)\in\Delta^0(w_1)}p(z_2)p(z_3)\mathrm{Im}\,(z_3\cdot\bar z_2)}p(w_1)p(w_2)p(w_3) \tag{3}$$

З а м е ч а н и е. Выражение $\sum_{(z_2,z_3)\in\Delta^0(w_1)}p(z_2)p(z_3)\mathrm{Im}\,(z_3\cdot\bar z_2)$ является инвариантом распределения $\mathbf{p}\in\Theta(0,0)$ класса $\mathcal{P}$, т. е. не зависит от w.

Следствие. *Любая линейная функция* f *на множестве распределений* $\Theta(0,0)$ *класса* $\mathcal{P}$ *имеет следующее представление в виде выпуклой комбинации ее значений на множестве крайних точек с трехточечными носителями*:
$$f(\mathbf{p})=\sum_{(z_1,z_2,z_3)\in\Delta^0}\alpha(\mathbf{p},z_1,z_2,z_3)\cdot f(\mathbf{p}^0(z_1,z_2,z_3))$$

с коэффициентами $\alpha(\mathbf{p}, z_1, z_2, z_3)$*, задаваемыми формулой* (3).

Исследование проводилось при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-06-00174-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Domansky V.*, *Kreps V.* Multistage biddings with risky assets: the case of countable set of possible liquidation values. In: Game Theory and Management, GTM2007, Collected papers./ Ed. by L. A. Petrosjan and N. A. Zenkevich, 2008, p. 92–106.
2. *Доманский В.К.*, *Крепс В.Л.* Момент обнаружения «инсайдерской» информации на торгах с асимметричной информированностью агентов. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 3, с. 399–416.