А. Л. Ш т р а у с (Ульяновск, УлГУ). **Задача оптимизации наблюдений временно ненаблюдаемых систем.**

В работе, представленной данным сообщением, рассматривается частично наблюдаемый случайный двумерный процесс, причем попеременно наблюдаются то первая, то вторая компоненты. За смену промежутков наблюдаемости отвечает пуассоновский процесс с заданной интенсивностью λ: каждый скачок пуассоновского процесса определяет переход к наблюдению следующей компоненты.

Исходный процесс восстанавливается по наблюдениям, при этом получаем оценку частично наблюдаемого процесса и ошибку оценивания. Ставится задача оптимизации процедуры наблюдения в смысле минимизации частоты переключения промежутков наблюдения и одновременной минимизации ошибки оценивания.

Введем вспомогательные процессы и обозначения: $X_t = (X_t^1, X_t^2)^T$ — частично наблюдаемый процесс, $Y_t = (Y_t^1, Y_t^2)^T$ — наблюдения. Считаем, что Y_1 периодически позволяет наблюдать X_1, Y_2 периодически позволяет наблюдать X_2, но в различные промежутки времени. Запишем это формально, вводя в рассмотрение пуассоновский процесс с интенсивностью λ: $\pi_t^\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} I\{t \leqslant \tau_i\}$, где $\tau_i = \inf\{t\colon\ t > 0,\ \pi_t^\lambda = j\}$ — моменты скачков процесса π_t^λ. Переключения описываются процессом телеграфного типа, порождаемым процессом π_t^λ: $N_t = 1 - \int_0^t N_{s\_}\, d\pi_s^\lambda + \int_0^t (1 - N_{s\_})\, d\pi_s^\lambda$. При этом $N_t \in \{0, 1\}$. Обозначим B_t матрицу $\left(\begin{smallmatrix} N_t & 0 \\ 0 & 1-N_t \end{smallmatrix}\right)$ управления наблюдениями. Процесс X_t предполагается двумерным процессом Орнштейна–Уленбека, Y_t — процессом, производные компонент которого в различные промежутки времени совпадают с компонентами процесса X_t. После регуляризации модели для осуществления процедуры классической фильтрации приходим к системе

$$dX_t = -Xt\, dt + dW_t, \quad dY_t^\varepsilon = -B_t X_t\, dt + \frac{1}{\varepsilon}\, d\overline{W}_t.$$

Здесь Y_t^ε — вспомогательный процесс, производная которого отличается от Y_t наличием регуляризующей компоненты $(1/\varepsilon) d\overline{W}_t$, $\varepsilon \to \infty$. Процессы π_t^λ, W_t, $\overline{W}_t$ попарно независимы. Теперь можно перейти к построению оценки процесса X_t по схеме Калмана. Пусть $\widetilde{X}_t = \mathbf{E}\,(X_t | F^{Y,\pi})$ — оценка частично наблюдаемого процесса, $\gamma_t = \mathbf{E}\,(X_t - \widetilde{X}_t)(X_t - \widetilde{X}_t)^T$ — ошибка оценивания.

Утверждение 1. *Существует конечный* $\lim_{t\to\infty}\{\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\gamma_t\}$.

Положим $F(\lambda) = \lim_{t\to\infty}\{\mathbf{E}\,\mathrm{Tr}\gamma_t\} + \lambda$. Тогда задача минимизации частоты переключения промежутков наблюдения и одновременной минимизации ошибки оценивания принимает следующий вид: $F(\lambda) \to \min_\lambda$, $\lambda \geqslant 0$.

Утверждение 2. *Существует* $\lambda_{\text{опт}} = \arg\min_\lambda F(\lambda)$.

Утверждение 3. *Функция потерь* $F(\lambda)$ *имеет следующий вид*:

$$F(\lambda) = \lambda - \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2}} + 1.$$

Функция $F(\lambda)$ выпукла вверх и имеет единственный локальный минимум, который находится численно. Значение λ, доставляющее локальный минимум функции $F(\lambda)$, и есть решение задачи оптимизации.

Автор выражает благодарность А. А. Бутову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974, 696 с.