Е. В. Бурнаев (Москва, ИППИ РАН). **О детерминированном методе второго порядка обнаружения разладки в минимаксной задаче для броуновского движения.**

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}, \mathbf{P})$ — фильтрованное вероятностное пространство и $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ — стандартное броуновское движение. Предполагается, что наблюдаемый процесс $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$, $X_t = \mu(t-\theta)^+ + \sigma B_t$, где $(x)^+ = \max\{x, 0\}$, $\mu \neq 0$, $\sigma > 0$ и θ — параметр, принимающий значения в $[0, \infty]$ и интерпретируемый как момент возникновения *разладки*.

Обозначим $\mathbf{P}_\theta = \mathrm{Law}\,(X|\mathbf{P}, \theta)$ — распределение вероятностей в предположении, что разладка произошла в момент θ. В таком случае распределение $\mathbf{P}_\infty$ — это распределение вероятностей процесса X, когда $\theta = \infty$, т. е. $\mathbf{P}_\infty = \mathrm{Law}(\sigma B_t,\, t \geqslant 0)$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{\tau\colon \tau = \tau(\omega) < \infty\}$ — класс конечных марковских моментов (остановки) относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t \geqslant 0}$. Момент τ будет интерпретироваться как момент подачи «сигнала» о появлении разладки.

Обозначим $\mathfrak{M}_T = \{\tau \in \mathfrak{M}\colon \mathbf{E}_\infty \tau = T\}$ для произвольного $T > 0$, где $\mathbf{E}_\infty$ — усреднения по мере $\mathbf{P}_\infty$. Класс $\mathfrak{M}_T$ — это класс тех моментов $\tau \in \mathfrak{M}$, для которых среднее время до объявления «ложной тревоги» о наличии разладки в ходе наблюдаемого процесса равно T.

Введем для $T > 0$ минимаксный риск

$$C(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \sup_\theta \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta | \tau \geqslant \theta),$$

характеризующий качество моментов остановки из класса $\mathfrak{M}_T$.

В [1] было построен *рандомизированный* момент остановки, обладающий при $T \to \infty$ свойством асимптотической оптимальности второго порядка. Цель работы, представленной данным сообщением, состоит в том, чтобы построить момент остановки, также обладающий при $T \to \infty$ свойством асимптотической оптимальности второго порядка, но при этом являющийся *детерминированным*.

Пусть $\psi = (\psi_t)_{t \geqslant 0}$ — процесс Ширяева [1]. Определим момент остановки $\tau_T^r = \inf\{t \geqslant 0\colon \psi_t \geqslant T + r | \psi_0 = r\}$, где $r \geqslant 0$ — параметр метода обнаружения разладки.

Теорема. *Пусть* $F(b) = e^b(-Ei(-b))$, *где* $-Ei(-x)$, $x > 0$ — *интегральная экспоненциальная функция*, $\Delta(b) = 1 - b\int_0^\infty e^{-bu} u^{-1} \log(1+u)\, du$, $G(b) = b^{-1}(F(b) - \Delta(b))$.

I. *Для любого* $T > 0$ *выполнено*:

а) $C(T) \geqslant \underline{C}(T) = \inf_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \dfrac{r\mathbf{E}_0\tau + \int_0^\infty \mathbf{E}_\theta(\tau - \theta)^+\, d\theta}{r+T} = \dfrac{1}{r+T} \inf\limits_{\tau \in \mathfrak{M}_T} \mathbf{E}_\infty^{(r)} \displaystyle\int_0^\tau \psi_\theta\, d\theta,$

где $\mathbf{E}_\infty^{(r)}$ — *математическое ожидание при условии, что* $\psi_0 = r$;

б) *оценка снизу* $\underline{C}(T) = (1/(T+r))(G(1/(T+r)) - G(1/r))$, *при этом инфимум достигается на* $\tau = \tau_T^r$;

в) $C(T) \leqslant \overline{C}(T) = \mathbf{E}_0 \tau_T^r = F(1/(T+r)) - F(1/r)$.

II. *Пусть* $r_0 > 0$ *является решением уравнения* $F(r_0) = 1$. *Тогда при* $T \to \infty$ *и* $r = r_0$ *выполнено, что* $\underline{C}(T) = \overline{C}(T) = \log T - 1 - \mathbf{C} + O\,(\log^2 T/T)$, *где* $\mathbf{C} = 0{,}577\ldots$ — *константа Эйлера, т. е. момент остановки* τ_T^r *обладает при* $T \to \infty$ *свойством асимптотической оптимальности второго порядка.*

III. *Пусть* $T \to 0$ *и* $r = r(T) \sim T$, *например*, $r(T) = Te^{-T}$, *тогда* $\underline{C}(T) = 3/4 + O\,(T^2)$ *и* $\overline{C}(T) = T + O\,(T^2)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 09–01–00584а, № 09–07–00180а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурнаев Е. В.*, *Ширяев А. Н.*, *Файнберг Е. А.* Об асимптотической оптимальности второго порядка в минимаксной задаче скорейшего обнаружения момента изменения сноса у броуновского движения. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 3, с. 557–575.