И. А. Гуримская (Нерюнгри, ЮЯИЖТ). **О решении краевых задач для дивергентного уравнения в полуплоскости.**

Рассмотрим в полуплоскости $D(x \in \mathbf{R},\ y < 0)$ третью краевую задачу

$$K\partial_{xx}\varphi + \partial_y(K\partial_y\varphi) = 0 \quad \partial_y\varphi + h\varphi|_{y=0} = f(x), \tag{1}$$

где $K(y) = p(by-1)^{-2}$, h, p, b — положительные постоянные, $\partial_x = \partial/\partial x$. Задача (1) описывает установившиеся динамические процессы (теплопроводности, фильтрации, диффузии, электростатики) в неоднородной полуплоскости $y \leqslant 0$, проницаемость которой убывает от постоянной p при $y = 0$ до нуля при $y = -\infty$. Представляя решение задачи (1) в виде

$$\varphi = bu - (by-1)\partial_y u, \tag{2}$$

для функции $u(x, y)$ получим задачу

$$\Delta u = 0, \quad y < 0; \quad \partial_{yy}u + h\partial_y u + hbu|_{y=0} = f(x). \tag{3}$$

Методом свертывания разложений Фурье [1] выразим решение задачи (1) через решение $F(x, y)$ классической задачи Дирихле в однородной полуплоскости $y < 0$: $\Delta F = 0$, $F|_{y=0} = f(x)$. Полагая, что функция $f(x)$ разлагается в интеграл Фурье с коэффициентами Фурье f_i, получим

$$f(x) = \int_0^\infty g\,d\lambda, \quad F(x,y) = \int_0^\infty e^{\lambda y} g\,d\lambda, \qquad y < 0, \tag{4}$$

где $g = f_1 \sin\lambda x + f_2 \cos\lambda x$. Отсюда следует формула (см. [1])

$$\frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-\gamma z} z^k F(x, y-z)\,dz = \int_0^\infty \frac{e^{\lambda y} g}{(\lambda+\gamma)^{k+1}}\,d\lambda, \qquad \gamma > 0, \quad y < 0, \tag{5}$$

$k = 0, 1, \ldots$. Представляя функцию u в виде $u = \int_0^\infty a e^{\lambda y} g\,d\lambda$, из граничного условия (3) и равенств (4) найдем $a = (\lambda^2 + h\lambda + bh)^{-1}$. При $h \neq 4b$, разлагая параметр a на простейшие дроби, с учетом формулы (5) при $k = 0$ найдем

$$u = \frac{1}{\sqrt{d}}\int_0^\infty F(x, y-z)(e^{-\gamma_1 z} - e^{-\gamma_2 z})\,dz, \tag{6}$$

где $\gamma_i = [h + (-1)^i\sqrt{d}]/2$, $d = h^2 - 4hb$. Отметим, что при $d < 0$ функция u (6) действительна. При $h = 4b$ получим $a = (\lambda + \gamma_1)^{-2}$. Тогда с учетом формулы (5) при $k = 1$ найдем

$$u = \int_0^\infty e^{-\gamma_1 z} z F(x, y-z)\,dz. \tag{7}$$

Отсюда решение задачи (1) строится по формулам (2), (6), (7).

Аналогично, решение первой краевой задачи

$$K\partial_{xx}\varphi + \partial_y(K\partial_y\varphi) = 0, \qquad y < 0, \qquad \varphi|_{y=0} = f(x),$$

строится по формулам (2), $u = \int_0^\infty e^{-bz} F(x, y-z)\,dz$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Холодовский С. Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах. — Дифференциальные уравнения, 2009, т. 45, № 6, с. 855–859.