О. В. З в е р е в, В. М. Х а м е т о в (Москва, МГИЭМ). **Об условиях справедливости опционального разложения.**

1. Опциональное разложение супермартингалов широко используется в теории оптимального управления случайными процессами и в финансовой математике [1], [2]. В докладе приводятся новые условия, обеспечивающие справедливость этого разложения.

2. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (F_t)_{t\in N_0}, P)$, где $N_0 \triangleq \{0,1,2,\dots,N\} \in \mathbf{Z}^+$, задана d-мерная ($d<\infty$) согласованная случайная последовательность, обозначаемая $\{S_t, F_t\}_{t\in N_0}$. Положим, что: i) вероятностная мера P фиксированна; ii) для любого $t\in N_0$: $F_t = F_t^S \triangleq \sigma(S_u,\, u\leqslant t)$. Обозначим $\Delta S_t \triangleq S_t - S_{t-1}$, $S_\bullet \triangleq (S_0, S_1, \dots, S_N)$. Пусть $f_N(S_\bullet)$ — любая F_N^S-измеримая ограниченная случайная величина. Пусть на фильтрованном измеримом пространстве $(\Omega, F, (F_t^S)_{t\in N_0})$ задана также вероятностная мера Q, эквивалентная мере P. Множество мер Q, эквивалентных P, обозначим Re_N. Везде ниже предполагается, что $\mathrm{Re}_N \neq \varnothing$. Множество мер $Q\in \mathrm{Re}_N$, относительно которых последовательность $\{S_t, F_t\}_{t\in N_0}$ является локальным мартингалом, обозначим $\wp_N$; $\gamma_1^N \triangleq \{\gamma_t\}_{t\in N_1}$, $N_1 \triangleq \{1,2,\dots,N\}$, обозначим d-мерную F^S-предсказуемую последовательность, которую назовем *стратегией*. Множество стратегий обозначим U_1^N. Пусть D_1^N — любое подмножество U_1^N, а $D_{t_1}^{t_2}$, где $t_1, t_2 \in N_1$ и $t_2 \geqslant t_1$ — сужение множества D_1^N на $\{t_1,\dots,t_2\} \subseteq N_1$, и для него используем обозначение $\gamma_{t_1}^{t_2} \in D_{t_1}^{t_2}$. Пару $(Q, \gamma_{t+1}^N) \in \mathrm{Re}_N \times U_{t+1}^N$ назовем *бистратегией* в момент времени $t\in N_1$. *Оценкой бистратегии* (Q,γ_{t+1}^N) в момент времени $t\in N_0$ назовем F_t^S-измеримую случайную величину, обозначаемую $I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ и определяемую равенством

$$I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N} \triangleq M^Q\left[\exp\left\{f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t+1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\right\}\Big| F_t^S\right],$$

где $(\bullet,\bullet)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$, $M^Q(\bullet|F_t^S)$ — условное математическое ожидание относительно σ-алгебры F_t^S. Стратегию γ_1^N назовем *допустимой*, если для любого $t\in N_1$ P-п. н. $\operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathbf{R}_N} G_Q(t, S_0^{t-1}, -\gamma) < \infty$, где $G_Q(t,S_0^{t-1},-\gamma) \triangleq \ln M^Q[\exp\{-(\gamma,\Delta S_t)\}|F_{t-1}^S]$, которую называют *кумулянтой последовательности* $\{S_t, F_t\}_{t\in N_0}$ относительно меры $Q\in \mathrm{Re}_N$ [1]. Множество допустимых стратегий обозначим $\overline{D}_1^N$.

3. Вспомогательные результаты. F_t^S-измеримую случайную величину $\overline{V}_t$, определяемую равенством

$$\overline{V}_t \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N\in\overline{D}_{t+1}} \ \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathbf{R}_N} I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$$

назовем *верхним гарантированным значением* в момент времени $t\in N_0$.

Теорема 1. *Пусть фильтрация $\{F_t^S\}_{t\in N_0}$ универсально полна. Тогда $\{\overline{V}_t, F_t^S\}_{t\in N_0}$ P-п. н. удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\overline{V}_t = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^S\in\overline{D}_{t+1}} \ \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathbf{R}_N} M_Q,[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma,\Delta S_{t+1})}|F_t^S], \quad \overline{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}. \qquad (1)$$

Сформулируем условие, выполнение которого обеспечивает достижение внешней существенной нижней грани в рекуррентном соотношении (1).

Условие (γ). Существуют такие мера $Q^\wedge \in \mathrm{Re}_N$ и константа $c_1>0$, что для любого $t\in N_1$: $\operatorname{ess\,inf}_{\gamma\in\overline{D}_t} e^{G_Q(t,S_0^{t-1},-\gamma)} \geqslant c_1$ P-п. н.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и выполнено условие* (γ). *Тогда существует такая стратегия* $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1} \in \overline{D}_1^N$, *что для любого* $t \in N_1$ *справедливы равенства* P-*п. н.*

$$\begin{aligned}\overline{V}_t &= \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in\overline{D}_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathbf{R}_N} M_Q[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma,\Delta S_{t+1})}|F_t^S] \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathbf{R}_N} M^Q[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma_{t+1}\,\Delta S_{t+1})}|F_t^S]|_{\gamma_{t+1}=\gamma_{t+1}^*}.\end{aligned} \tag{2}$$

Кроме того, для любых $t \in N_1$ *и* $Q \in \mathrm{Re}_N$ *справедливо неравенство*

$$\overline{V}_{t-1} \geqslant M^Q[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*,\Delta S_t)}|F_{t-1}^S] \quad Q(P)\text{-п. н.}$$

4. Основной результат.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда существует возрастающая последовательность* $\{C_t^*, F_t^S\}_{t\in N_0}$, *определяемая равенством*

$$\Delta C_t^* \stackrel{\Delta}{=} (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta \ln \overline{V}_t \geqslant 0 \quad P\text{-п. н.}, \quad C_t^*|_{t=0} = 0,$$

где $\{\gamma_t^*, F_{t-1}^S\}_{t\in N_1}$ — *предсказуемая последовательность, определяемая равенством* (2), *а* $\{\overline{V}_t, F_t^S\}_{t\in N_0}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (1), *при этом относительно любой меры* $Q \in \mathrm{Re}_N$

$$f_N(S_\bullet) = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_*, \Delta S_i) - C_N^* \quad Q\text{-п. н.} \tag{3}$$

З а м е ч а н и е. 1) Отметим, что если $\mathrm{Re}_N = \wp_N$, то разложение (3) и опциональное разложение [1], [2] совпадают.

2) Разложение (3) отличается от установленного в [1], [2] опционального разложения тем, что последовательность $\{S_t, F_t^S\}_{t\in N_0}$ относительно любой меры $Q \in \mathrm{Re}_N \setminus \wp_N$ не является локальным мартингалом.

3) Разложение (3) позволяет рассчитать европейский опцион на неполном рынке при наличии арбитражной ситуации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т. 2. Теория. М.: Фазис, 1998, 544 с.
2. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО, 2008, 496 с.