П. А. Лужецкая (Ростов-на-Дону, РГУПС). **О расчете мартингальной меры для условно-круговых α-устойчивых распределений финансовых индексов.**

Рассматривается следующая модель поведения цены акции:

$$S_n = S_{n-1} \exp\{\nu_n + \sigma_n \varepsilon_n\}, \tag{1}$$

в которой распределение ε_n — круговое α-устойчивое распределение, причем последовательность ε — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Модель (1) предлагается в качестве альтернативы условно-гауссовым распределениям финансовых индексов [1], поскольку гауссово распределение не позволяет учесть такие наблюдаемые факты, как пики, кластерность и тяжелые хвосты в поведении финансовых индексов. Отметим также, что колебание цен происходит в определенном коридоре, который в условно-гауссовых распределениях определяется за счет того, что вероятность для стандартной нормальной величины попасть в интервал $[-3, 3]$ приблизительно равна 1. Однако быстрое убывание хвостов приводит к тому, что значение плотности стандартного нормального распределения на концах интервала приблизительно равно нулю. Противоположная ситуация с равномерным распределением на этом же интервале. На концах интервала так же, как и во всех внутренних точках, значение плотности равно $1/6$. Желание получить компромисс между двумя альтернативами приводит к использованию круговых α-устойчивых распределений.

Будем считать, что ε_n в модели (1) — независимые одинаково распределенные величины, с общим распределением круговым $S_\alpha(1, 0, 0)$.

При $\alpha = 2$ характер поведения хвостов существенно меняется, поскольку $S_2(1, 0, 0) = N(0, 2)$.

Нетрудно показать, что если исходное распределение $S_\alpha(1, 0, 0)$, то плотность соответствующего кругового распределения

$$f_c(y) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^\alpha} \cos ky. \tag{2}$$

Рассмотрим естественную фильтрацию

$$F_0 = \sigma(\varnothing, \Omega), \quad \ldots, \quad F_n = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \tag{3}$$

и вычислим мартингальную меру.

Будем считать, что $\mu_n, \sigma_n \in F_{n-1}$. Пусть мера P порождается последовательностью $(\mu_n + \sigma_n \varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$. Рассмотрим меру P^*, эквивалентную мере P. Меры P_n и P_n^* — сужения мер P и P^* на σ-алгебру F_n. Из эквивалентности мер следует, что существует процесс плотности Z, удовлетворяющий соотношению

$$dP_n^* = Z_n \, dP_n. \tag{4}$$

Представим процесс плотности в виде, аналогичном (1):

$$Z_n = Z_{n-1} \exp\{\gamma_n + \beta_n \varepsilon_n\} \tag{5}$$

с $\alpha_n, \beta_n \in F_{n-1}$ и $Z_0 = 1$.

Выберем меру P^* таким образом, чтобы последовательность $(S_n)_{n \geqslant 0}$ была (F_n, P^*)-мартингалом. Это эквивалентно выбору процесса плотности таким образом, чтобы: а) процесс плотности $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ был (F_n, P)-мартингалом; б) процесс $(Z_n S_n)_{n \geqslant 0}$ был (F_n, P)-мартингалом.

В результате получаем систему уравнений относительно параметров $(\gamma_n, \beta_n)_{n\geqslant 1}$:

$$\begin{gathered}
(\exp\{\gamma_n + \beta_n\pi\} - \exp\{\gamma_n - \beta_n\pi\})\left(\frac{1}{2\pi\beta_n} + \frac{\beta_n}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\exp\{-k^n\}}{k^2+\beta_n^2}\right) = 1, \\
(\exp\{(\mu_n+\gamma_n) + (\sigma_n+\beta_n)\pi\} - \exp\{(\mu_n+\gamma_n) - (\sigma_n+\beta_n)\pi\}) \\
\times\left(\frac{1}{2\pi(\sigma_n+\beta_n)} + \frac{\sigma_n+\beta_n}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp\{-k^n\}}{k^2+(\sigma_n+\beta_n)^2}\right) = 1.
\end{gathered} \tag{6}$$

Отсюда процесс плотности существует тогда и только тогда, когда система (6) имеет решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. М.: Фазис, 1998, 489 с.