**О. О. Лямин** (Москва, МГУ). **О скорости сходимости распределений некоторых статистик к распределению Лапласа.**

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — некоторые случайные величины и $T_n = T_n(X_1, \ldots, X_n)$ — асимптотически нормальная статистика, т.е. существуют такие $\sigma > 0$ и $\mu \in \mathbf{R}^1$, что

$$\mathbf{P}\{\sqrt{n}\sigma(T_n - \mu) < x\} \implies \Phi(x),\ n \to \infty.$$

Далее, пусть $m$ — некоторое натуральное число. В работе [1] было показано, что распределение Лапласа является масштабной смесью нормальных законов при обратном показательном смешивающем распределении, т. е.

$$\Lambda_m(x) = \int_0^\infty \Phi(x\sqrt{y})\, dQ(y), \qquad x \in \mathbf{R}^1,$$

где

$$Q_m(y) = e^{-m/y}, \qquad y > 0, \tag{1}$$

а $\Lambda_m(x)$ — функция распределения Лапласа с плотностью

$$\lambda_m(x) = \sqrt{m/2}\exp\{-\sqrt{2m}|x|\}, \qquad x \in \mathbf{R}^1. \tag{2}$$

Пусть $N^{(1)}, N^{(2)}, \ldots$ — независимые случайные величины с дискретным распределением Парето

$$\mathbf{P}\{N^{(i)} \geqslant k\} = \frac{m}{m+k-1}, \qquad k \geqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

каждая из которых не зависит от $X_1, X_2, \ldots$. Положим $N_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} N^{(j)}$. В работе [1] было показано, что для любого $x > 0$: $\mathbf{P}\{N_n/n < x\} \implies Q_m(x)$, $n \to \infty$. Тогда лемма 12.6.1 из [2] с $d_n = n$ дает иллюстрацию того, как вместо ожидаемого нормального распределения при замене объема выборки случайной величиной $N_n$ в качестве предельного распределения статистик возникает распределение Лапласа.

**Теорема 1.** *Для каждого $m$ существует такая константа $C_m > 0$, что при $n \to \infty$*

$$\sup_{x>0} |\mathbf{P}\{N_n/n < x\} - Q_m(x)| \leqslant C_m n^{-1},$$

*причем $C_m = 8e^{-2}/3$, если $m = 1$, и $C_m = 2e^{-2}$, если $m \geqslant 2$.*

Используя теорему 1, можно получить оценку скорости сходимости распределения $T_{N_n}$ к распределению Лапласа из оценки скорости сходимости распределения $T_n$ к нормальному распределению.

**Теорема 2.** *Пусть распределение $T_n$ при $n \to \infty$ удовлетворяет соотношению*

$$\sup_x |\mathbf{P}\{\sqrt{n}\sigma(T_n - \mu) < x\} - \Phi(x)| = O(n^{-s}),$$

*где $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbf{R}^1$, $0 < s \leqslant s_0 < 2$, тогда распределение $T_{N_n}$ при $n \to \infty$ удовлетворяет равенству*

$$\sup_x |\mathbf{P}\{\sqrt{n}\sigma(T_{N_n} - \mu) < x\} - \Lambda_m(x)| = O(n^{-\min\{1,s\}}).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бенинг В. Е., Королев В. Ю.* Некоторые статистические задачи, связанные с распределением Лапласа. — Информатика и ее применения, 2008, т. 2, № 2, с. 19–34.
2. *Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. И.* Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007.