О. В. Захарова (Уфа, УГАТУ). **Первая краевая задача для одного класса стохастических волновых уравнений.**

Рассмотрим задачу колебания закрепленной струны под действием случайной внешней силы

$$u''_{tt}(t,x) = u''_{xx}(t,x) + a(t,x,W(t)) + b(x,W(t))W'_t(t), \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(t,x)|_{t=0} = v_0(x), \quad u(t,x)|_{x\in\partial G} = \mu(t), \quad x \in G \subset \mathbf{R}^1, \quad t \in [0,T],$$

где $a(t,x,v)$, $b(x,v)$ — детерминированные функции, гладкие по своим переменным, формальная производная винеровского процесса $W'_t(t)$ понимается в смысле Стратоновича, а само уравнение (1) — в интегральной форме. Задача (1) в различных формах рассматривалась многими авторами, в частности, в работах [1], [2], доказывалось существование решения, обсуждались некоторые свойства и оценки, однако поиск численно-аналитических методов ее решения оставался актуальной задачей.

Решение задачи (1) ищем в виде $u(t,x) = \int_0^t \varphi(s,x,W(s))\,ds + u(0,x)$ при помощи метода, аналогичного описанному в работе [3], получаем два соотношения

$$\varphi'_v(t,x,v) = b(x,v), \quad \varphi'_s(s,x,v)|_{v=W(s)} = \int_0^s \varphi''_{xx}(\tau,x,W(\tau))\,d\tau + u''_0(x) + a(s,x,W(s)).$$

Первое из них легко интегрируется: $\varphi(t,x,W(t)) = \widetilde{b}(x,W(t)) - \widetilde{b}(x,W(0)) + \varphi(t,x,W(0))$, где $\widetilde{b}(x,v)$ — первообразная функции $b(x,v)$ по переменной v. Обозначим $c(t,x) = \varphi(t,x,W(0)) - \widetilde{b}(x,W(0))$, $\widetilde{c}(t,x) = \int_0^t c(s,x)\,ds$. Таким образом, $u(t,x) = \int_0^t \widetilde{b}(x,W(s))\,ds + \widetilde{c}(t,x) + u_0(x)$, следовательно, $\varphi(t,x,W(t)) = u'_t(t,x) = \widetilde{b}(x,W(t)) + \widetilde{c}'_t(t,x)$, откуда получаем $\widetilde{c}'_t(t,x)|_{t=0} = v_0(x) - \widetilde{b}(x,W(0))$. Вычислим частную производную $\varphi'_t(t,x,W(t))$ и, подставив найденные соотношения в уравнение (1), получим первую краевую задачу для классического (не стохастического) волнового уравнения

$$\widetilde{c}''_{ss}(s,x) = \widetilde{c}''_{xx}(s,x) + \int_0^s \widetilde{b}''_{xx}(x,W(\tau))\,d\tau + u''_{0xx}(x) + a(s,x,W(s)),$$

$$\widetilde{c}(0,x) = 0, \quad \widetilde{c}'_t(t,x)|_{t=0} = v_0(x) - \widetilde{b}(x,W(0)),$$

$$\widetilde{c}(t,x)|_{x\in\partial G} = \mu(t) - \int_0^t \widetilde{b}(x,W(s))\,ds|_{x\in\partial G} - u_0(x)|_{x\in\partial G},$$

которую можно решить классическими численными методами, например, используя явную схему «крест» (см. [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Orsingher E.* Randomly forced vibrations of a string. — Annales de l'I.H.P., section B, 1982, v. 18, № 4, p. 367–394.
2. *Peszat S.* SPDEs Driven by a Homogeneous Wiener Process. — Stochastic partial differential equations and applications. New York–Basel: Marsel Dekker, Inc., 2002, p. 417–429.
3. *Калиткин Н. Н.* Численные методы./ Под ред. А. А. Самарского. М.: Наука, 1978, 512 с.
4. *Насыров Ф. С.* Симметричные интегралы и стохастический анализ. — Теория вероятн. и ее примен., 2006, т. 51, в. 3, с. 496–517.