А. Г. А р с и т о в (Ульяновск, УлГУ). **Классический и рекуррентный подход в методе наименьших квадратов.**

Введение. Существует два подхода к решению задач МНК: классический и рекуррентный (фильтр Калмана). Рассмотрим их в условиях плохой численной обусловленности.

Задача. Будем рассматривать линейную регрессионную модель:

$$z = Ax + v, \tag{1}$$

где A — матрица эксперимента, а z — отклик системы. Задача заключается в поиске такого $\widehat{x}$, который удовлетворяет критерию МНК: $J(x) = \|z - Ax\|^2 \to \min_x$. Проблема мультиколлинерности матрицы A относится к категории некорректных задач. В условиях мультиколлинеарности нормальная система уравнений данной модели имеет вырожденную матрицу $A^T A$.

Связь между классическими и рекуррентными алгоритмами. Для решения некорректных задач может быть использован классический метод регуляризации Тихонова. Рассматривается система

$$\widetilde{z} = Ax + \widetilde{v}, \quad \text{где} \quad \|z - \widetilde{z}\| \leqslant \delta. \tag{2}$$

Требуется найти приближение $\widehat{x}_\delta$, сходящееся к решению изначальной задачи (1) при $\delta \to 0$. Задача (2) в итоге сводится к решению:

$$M^\alpha[x, \widetilde{z}] = \|Ax - \widetilde{z}\|^2 + \alpha\|x\|^2 \to \min_x .$$

Здесь α — малый положительный параметр регуляризации. Задача о минимизации $M^\alpha[x, \widetilde{z}]$ эквивалентна следующей СЛУ:

$$(A^T A + \alpha I)x = A^T z. \tag{3}$$

При выводе информационного фильтра Калмана также рассматривается априорная система: $f = \widetilde{R}x + \omega$.

В случае $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{R}^T \widetilde{R} = \varepsilon I$ и $\widetilde{x} = \widetilde{0}$ расширенная задача сводится к решению задачи

$$(A^T A + \varepsilon I)x = A^T z. \tag{4}$$

Итак, сопоставляя (3) и (4), видно, что метод регуляризации Тихонова эквивалентен последовательному подходу в алгоритме Калмана. Кроме того, параметр регуляризации α сопоставлен ε в (4).

Классический подход не задает способ выбора α, а в фильтре Калмана достаточно выбрать ε малым. Например, ковариационный алгоритм с матрицей P_i при начальном значении $P_0 = \varepsilon^{-1} I$ с $0 < \varepsilon \ll 1$ в форме Калмана имеет вид

$$\alpha_i = a_i^T P_{i-1} a_i + 1, \quad K_i = P_{i-1} a_i / \alpha_i,$$

$$P_i = P_{i-1} - K_i a_i^T P_{i-1}, \quad \widehat{x}_i = \widehat{x}_{i-1} + K_i(\zeta_i - a_i^T \widehat{x}_{i-1}).$$

Современные модификации фильтра Калмана. К современным модификациям фильтра Калмана относят квадратно-корневые совмещенные алгоритмы. Метод основан на ортогональном преобразовании предматрицы и получении постматрицы. Преимуществами такого алгоритма являются: 1) численная устойчивость в условиях плохо обусловленных задач (в условиях мультиколлинеарности); 2) совмещение этапов обновления и экстраполяции оценок; 3) расширенный квадратно-корневой алгоритм позволяет избежать обращения матриц, т. е. операции численного деления.

Заключение. Рекуррентные и классические алгоритмы связаны между собой, связь эта лежит в основе их построения. Но последние, в отличие от последовательных методов, не дают нам численного метода нахождения решения. Кроме того, современные модификации фильтра Калмана обладают численной устойчивостью в условиях мультиколлинеарности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А. Н.*, *Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986, с. 110–127.
2. *Park P.*, *Kailath T.* New square-root algorithms for Kalman filtering. — IEEE Trans. on Automatic Control, 1995.