Н. В. Данилова (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Расчеты для диффузионной модели с переключением параметров.**

Рассмотрим следующую модель:

$$dS_t = S_t(\mu(S_t)\,dt + \sigma(S_t)\,dW_t), \quad dB_t = B_t r(S_t)\,dt, \tag{1}$$

в которой W_t — винеровский процесс, $t \in [0,T]$.

Считаем, что S_0 известно, $B_0 = 1$. Пусть задана последовательность «барьеров» $0 = M_0 < M_1 < \cdots < M_{\widetilde{N}}$. Функции μ, σ, r зависят от S_t и задаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\mu(S_t) &= \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \mu_i I_{\{M_{i-1} \leqslant S_t < M_i\}} + \mu_{\widetilde{N}+1} I_{\{S_t \geqslant M_{\widetilde{N}}\}},\\
\sigma(S_t) &= \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \sigma_i I_{\{M_{i-1} \leqslant S_t < M_i\}} + \sigma_{\widetilde{N}+1} I_{\{S_t \geqslant M_{\widetilde{N}}\}},\\
r(S_t) &= \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} r_i I_{\{M_{i-1} \leqslant S_t < M_i\}} + r_{\widetilde{N}+1} I_{\{S_t \geqslant M_{\widetilde{N}}\}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

В данном случае μ_i, σ_i, r_i $(i = 1, 2, \ldots, \widetilde{N}+1)$ — некоторые числа. Назовем полученную модель «моделью с переключением параметров».

Для модели необходимо найти процесс $X_t^* = B_t \mathbf{E}^*(f_T/B_T | F_T)$, где $\mathbf{E}^*$ — математическое ожидание по мартингальной мере P^* по отношению к процессу (S_t/B_t), $t \in [0,T]$, и фильтрации $F_t = \sigma(W_\tau : \tau \leqslant t)$; $f_T = f(S_T)$. Для решения задачи предложены два подхода: метод дискретной аппроксимации и метод Монте-Карло. Выберем N таким, чтобы вероятность того, что число переключений превосходит N, была близка к нулю.

Посредством преобразования Гирсанова [1, с. 843] рассматриваемую модель можно записать следующим образом:

$$dS_t = S_t(r(S_t)\,dt + \sigma(S_t)\,dW_t^*), \quad dB_t = B_t r(S_t)\,dt, \tag{3}$$

где W^* — винеровский процесс по мере P^*. Разобьем отрезок $[0,T]$ на $\widehat{N}$ частей.

Метод дискретной аппроксимации основан на замене системы уравнений (3) на систему уравнений следующего вида:

$$\Delta S_n = S_{n-1}(r(S_{n-1}) + \sigma(S_{n-1})\varepsilon_n^*), \quad \Delta B_n = B_{n-1} r(S_{n-1}), \tag{4}$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, независимы и $P^*\{\varepsilon_i^* = 1\} = P^*\{\varepsilon_i^* = -1\}$, $i = 1, 2, \ldots, \widehat{N}$;

$$\begin{aligned}
\sigma(S_n) &= \sqrt{\frac{T-t}{\widehat{N}}} \left(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \sigma_i I_{\{M_{i-1} \leqslant S_n < M_i\}} + \sigma_{\widetilde{N}+1} I_{\{S_n \geqslant M_{\widetilde{N}}\}} \right),\\
r(S_n) &= \frac{T-t}{\widehat{N}} \left(\sum_{i=1}^{\widetilde{N}} r_i I_{\{M_{i-1} \leqslant S_n < M_i\}} + r_{\widetilde{N}+1} I_{\{S_n \geqslant M_{\widetilde{N}}\}} \right).
\end{aligned}$$

Для дискретной аппроксимации $\widetilde{X}$ процесса X^* справедлива формула

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_{n-1} &= g_{n-1}(S_{n-1})\\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\widetilde{N}} \frac{1}{1+r_i} \Big[g_n(S_{n-1}(1 + r_i + \sigma_i)) + g_n(S_{n-1}(1 + r_i - \sigma_i)) \Big] I_{\{M_{i-1} \leqslant S_{n-1} < M_i\}}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2(1+r_{\widetilde{N}+1})}\Big[g_n(S_{n-1}(1+r_{\widetilde{N}+1}+\sigma_{\widetilde{N}+1}))+g_n(S_{n-1}(1+r_{\widetilde{N}+1}-\sigma_{\widetilde{N}+1}))\Big]$$
$$\times I_{\{S_{n-1}\geqslant M_{\widetilde{N}}\}},\qquad n=\widehat{N},\widehat{N}-1,\dots,1,$$

где $\widetilde{X}_{\widehat{N}}=f_{\widehat{N}}=g_{\widehat{N}}(S_{\widehat{N}})$.

Для метода Монте-Карло необходимо определить моменты остановки τ_i, $i=1,2,\dots,N$, которые задаются как моменты переключения параметров (пересечения «барьеров»); кроме этого, необходимо произвести дискретизацию винеровского процесса, например, следующим образом: $\widehat{W}^*_i=\sum_{j=1}^{i}\xi_j\sqrt{h}$, где $h=(T-t)/\widehat{N}$, $\xi_j\sim N(0,1)$ и независимы, $j=1,2,\dots,\widehat{N}$. Дискретизацию процесса S_t можно записать следующим образом:

$$S_i=S_{i-1}\exp\left\{\left(r(S_{i-1})-\frac{\sigma^2(S_{i-1})}{2}\right)h+\sigma(S_{i-1})\Delta\widehat{W}^*_i\right\}.$$

Для моментов остановки определим величины $m_i=j$, если $M_j\leqslant S_i<M_{j+1}$, $j=0,1,\dots,\widetilde{N}-1$, и $M_i=\widetilde{N}$, если $S_i\geqslant M_{\widetilde{N}}$, через которые выразим последовательность моментов остановки $\tau_j=\inf_{\tau_{j-1}<i\leqslant\widehat{N}}(m_i\neq m_{\tau_{j-1}})h$, $j=1,2,\dots,\widehat{N}$. Считаем, что $\tau_0=0$. Пусть мы проводим L экспериментов. Тогда аппроксимация процесса X^* процессом $\widehat{X}$ по методу Монте-Карло имеет вид

$$\widehat{X}_t\approx\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left[S_tN\left(\frac{-d(\tau_1^i,\tau_2^i,\dots,\tau_N^i)+\chi^2(\tau_1^i,\tau_2^i,\dots,\tau_N^i)}{\chi(\tau_1^i,\tau_2^i,\dots,\tau_N^i)}\right)\right.$$
$$\left.-K\left(\frac{B_t}{B_T}N\left(-\frac{d(\tau_1^i,\tau_2^i,\dots,\tau_N^i)}{\chi(\tau_1^i,\tau_2^i,\dots,\tau_N^i)}\right)\right)\right],$$

$d(\tau_1^i,\tau_2^i,\dots,\tau_N^i)=\ln(K/S_t)-\sum_{k=1}^{N}\delta_{k-1}(\tau_k^i-\tau_{k-1}^i)-\delta_N(T-\tau_N^i)$, $\chi(\tau_1^i,\tau_2^i,\dots,\tau_N^i)=\sqrt{\sum_{k=1}^{N}\theta_{k-1}^2(\tau_k^i-\tau_{k-1}^i)+\theta_N^2(T-\tau_N^i)}$, где $(\tau_1^i,\tau_2^i,\dots,\tau_N^i)$ — значение вектора моментов остановки, полученное в i-м эксперименте, $N(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\,dt$ есть функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Отметим, что методы дают близкие результаты (до четырех знаков после запятой).

Задаче можно дать финансовую интерпретацию. Если предположить, что процессы S_t, B_t описывают стоимости, соответственно, рискового и «безрискового» активов на $[0,T]$, то X^*_t является капиталом оптимального портфеля в момент времени t, а X^*_0 является справедливой ценой европейского опциона call.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т.1,2. М.: Фазис, 2004.