А. С. Калитвин, В. А. Калитвин (Липецк, ЛГПУ). **Изучение некоторых математических моделей методами интегро-дифференциальных уравнений Барбашина.**

В [1] построены основы теории интегро-дифференциальных уравнений Барбашина вида

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = c(t,s)x(t,s) + \int_R k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma + f(t,s), \tag{1}$$

где $s \in R = [c,d]$, $t \in J$, J — конечный или бесконечный промежуток числовой оси, а $c(t,s)$, $k(t,s,\sigma)$ и $f(t,s)$ — заданные и измеримые на $D = J \times R$, $D \times R$ и D соответственно функции. При этом исследовались начальные и краевые задачи для уравнения (1), которые сводились к начальным и двухточечным задачам для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах или к интегральным уравнениям с частными интегралами с классическими или обобщенными решениями, изучались вопросы устойчивости и ограниченности решений, существование периодических решений уравнения (1). В частности, уравнение (1) с начальным условием $x(t_0,s) = \varphi(s)$ имеет единственное классическое решение, если функции $c(t,s)$, $f(t,s)$ и $x(t_0,s) = \varphi(s)$ непрерывны на D и R соответственно, а функция $k(t,s,\sigma)$ принадлежит пространству $C(L^1)$ непрерывных на D вектор-функций со значениямив $L^1(R)$.

Развитые в [1] методы применимы к качественному исследованию систем нестационарных уравнений баланса для произвольно большого количества веществ $m \to \infty$ (систем с существенно распределенными параметрами). При этом m заменяется переменной $s \in [c,d]$, переменная t имеет различный физический смысл, а при фиксированном s функция $x(\cdot,s)$ может рассматриваться как функция плотности распределения материала. Численный анализ систем с существенно распределенными параметрами производился в [2].

Исследование интегро-дифференциального уравнения Барбашина (1) с $R = [-1,1]$ и с граничными условиями

$$x(a,s) = \varphi(s), \qquad 0 < s \leqslant 1, \quad x(b,s) = \psi(s), \qquad -1 \leqslant s < 0, \tag{2}$$

которые типичны для задач плоскопаралльной теории переноса, приводит к необходимости изучения его обобщенных решений, так как даже в простейших случаях задача (1)–(2) может не иметь непрерывных вместе с частной производной по t решений. Условия существования и единственности обобщенного решения задачи (1)–(2) рассмотрены в [1].

При $R = (-\infty,+\infty)$ с интегро-дифференциальным уравнением Барбашина (1) связана описанная А. Н. Колмогоровым в [3] одна задача теории вероятностей.

Пусть за бесконечно малый промежуток времени $(t, t+dt)$ параметр s с вероятностью $1 - a(t,s)\,dt$ сохраняет прежнее значение и с вероятностью $k(t,s,\sigma)\,dt\,d\sigma$ переходит в s', где $\sigma < s' < \sigma + d\sigma$ и $\int_R k(t,s,\sigma)\,d\sigma = a(t,s)$. Если в момент времени t_0 известна дифференциальная функция распределения $x(t_0,s)$, то функция распределения $x(t,s)$ при любом $t > t_0$, по определению, имеет следующий вид: $x(t,s) = \int_R f(t_0,\sigma,t,s)x(t_0,\sigma)\,d\sigma$, где неотрицательная функция $f(t_0,\sigma,t,s)$ измерима в смысле Бореля относительно σ, s и определяет схему некоторого стохастического процесса. А. Н. Колмогоров отметил, что для $x(t,s)$ должно, по-видимому, иметь место интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = -a(t,s)x(t,s) + \int_R k(t,s,\sigma)x(t,\sigma)\,d\sigma,$$

которое является частным случаем интегро-дифференциального уравнения Барбашина (1).

Условия существования и единственности классического решения задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения Барбашина (1) с $R = (-\infty, +\infty)$ получены в [4], а обобщенного решения — в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations. New York: Marcel Dekker, 2000, 560 p.
2. *Калитвин В. А.* О численном анализе одной модели в теории систем с существенно распределенными параметрами. — В сб.: Материалы III международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования». Ч. I. Воронеж: Научная книга, 2009, с. 14–15.
3. *Колмогоров А. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986, 535 с.
4. *Калитвин А. С.* Об интегро-дифференциальном уравнении одной задачи теории вероятностей. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 663–664.
5. *Калитвин А. С.* Интегро-дифференциальные уравнения Барбашина в пространствах функций, заданных на неограниченных множествах на плоскости. — Труды института матем. НАН Беларуси (в печати).