Э. Л. П р е с м а н (Москва, ЦЭМИ РАН)**. Решение задач оптимальной остановки методом модификации функции платы.**

Рассматривается однородный по времени строго марковский процесс $Z = (Z_t)_{t\geqslant 0}$ со значениями в $X \cup e$, где $(X, \mathcal{B})$ — измеримое пространство, а e — поглощающее состояние. Считаются заданными: $\rho(z) \geqslant 0$ — интенсивность убивания; $g(z)$ — функция платы, $g(e) = 0$; $c(z)$ — стоимость наблюдений, $c(e) = 0$. В дискретном времени рассматривается функционал $V(z,\tau) = \mathbf{E}_z[g(Z_\tau) - \sum_{s=0}^{\tau-1} c(Z_s)]$, а в непрерывном $V(z,\tau) = \mathbf{E}_z[g(Z_\tau) - \int_0^\tau c(Z_s)\,ds]$. Предполагается, что математическое ожидание определено для всех моментов остановки τ. Задача состоит в нахождении цены игры $V(z) = \sup_\tau V(z,\tau)$ и оптимизирующего момента остановки.

Общую теорию оптимальной остановки и методы построения цены игры в дискретном и непрерывном времени можно найти, например, в [1]. В дискретном времени стандартный подход состоит в рекуррентном нахождении цены игры при ограничении $\tau \leqslant n$ и переходе к пределу. Но при таком подходе даже в случае конечного числа состояний для нахождения цены игры необходимо бесконечное число шагов. Для конечного числа состояний И. М. Сонин ([4–5]) предложил алгоритм, который позволяет найти цену игры за число шагов, не превосходящее удвоенного числа состояний. Алгоритм основан на модификации марковской цепи на каждом шаге, связанной с исключением состояний, которые заведомо принадлежат множеству продолжения. Для решения задачи с произвольным множеством состояний алгоритм пришлось модифицировать ([2–3]). Для получения возможности обобщения на непрерывное время понадобилась дальнейшая модификация.

В основе предлагаемого подхода лежит следующая лемма. Для произвольного подмножества C множества X обозначим $\tau_C = \inf\{t\colon\ Z_t \notin C\}$, $g_C(z) = V(z, \tau_C)$.

Лемма. *Если $g_C(z) > g(z)$ для всех $z \in C$, то задача с функцией платы $g_C(z)$ имеет ту же самую цену игры, что и задача с функцией платы $g(z)$.*

В дискретном времени при некоторых дополнительных условиях в качестве C можно взять множество $\{z\colon\ g(z) < \mathcal{T} g(z)\}$, где $\mathcal{T} f(z) = -c(z) + E_z f(Z_1)$ — оператор переоценки. Приводятся примеры одномерных задач оптимальной остановки в непрерывном времени, когда в качестве множества C берется либо множество, где применение инфинитезимального оператора к функции платы дает положительные значения, либо множество, где сама функция платы или ее производные терпят разрыв, либо когда конечная точка отрезка, на котором рассматривается процесс, является отражающей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 10-01-00767а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peskir G.*, *Shiryaev A. N.* Optimal stopping and free-boundary problems. Basel: Birkhauser, 2006.
2. Об алгоритме Сонина решения задачи оптимальной остановки. — В сб.: Труды Четвертой международной конференции по проблемам управления (26–30 января 2009 года). М.: ИПУ РАН, 2009, с. 300–309.
3. *Presman E. L.*, *Sonin I. M.* On one problem of optimal stopping for random variables given on a Markov chain. — Theory of Probab. and its Applic., 2009, v. 54 (3).
4. *Sonin I. M.* The elimination algorithm for the problem of optimal stopping. — Math. Meth. of Oper. Res., 1999, v. 49, p. 111–123.
5. *Sonin I. M.* Optimal stopping of Markov chains and recursive solution of Poisson and Bellman equations. — In: From Stochastic Calculus to Mathematical Finance. The Shiryaev Festschrift, Springer-Verlag, 2006, p. 609–621.