Э. Ф. Х а й р е т д и н о в (Москва, НИИМ МГУ). **Пограничный слой на полубесконечной пластине конечной толщины.**

Уравнения пограничного слоя на крыловом профиле, обтекаемом потенциальным потоком, представляются в виде [1]

$$u_x + v_y = 0, \quad uu_x + vu_y = V(x)V'(x) + \nu u_{yy}. \tag{1}$$

Здесь $V(x)$ — распределение скорости вдоль профиля при обтекании его потенциальным потоком, ν — кинематическая вязкость.

Решение уравнений (1) должно удовлетворять граничным условиям

$$y = 0: \quad v = u = 0; \qquad y \to \infty: \quad u \to V(x). \tag{2}$$

Теоретически решение уравнеий (1) может быть построено, если известно их решение в начальной точке $x = 0$: в начальной точке должны быть заданы значения $u = u_0(y)$, $v = v_0(y)$, $u_y = \omega_y(y)$. (Вообще говоря, в произвольно заданной начальной точке они определены быть не могут, но в критической точке профиля с закругленной передней кромкой они определяются точно: решение Hiemenz'а [1, с. 78–80].) В этом случае решение может быть построено в виде ряда $u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)g_k(y)$ (функции $a_k(x)$ и $g_k(y)$ определяются последовательно в процессе решения [1, с. 131–133]).

В публикации [2] сообщается, что для того чтобы решение уравнений (1) представлялось в виде степенного функционального ряда $u = \sum_{j=0}^{\infty} x^j f_j(y)$, функция $V(x)$ в начальной точке должна удовлетворять условиям $V(0) = 0$, $V'(0) = k > 0$, $V''(0) = 0$, при этом ряд u не содержит 1-й степени x: $f_1(y) \equiv 0$.

Необходимость выплнения условия $V''(0) = 0$ связана с тем, что параметр $|u_{xx}|$ при $x \to 0$ неограниченно возрастает, если оно не выполняется.

Более рациональный метод решения уравнений (1) связан с введением в рассмотрение калибрующей толщины (термин С. С. Григоряна) пограничного слоя $h(x)$ и калиброванных поперечной координаты $\eta = y/h$ и такой функции тока $F(x, \eta)$, что $u = V(x)F_\eta(x, \eta)$. Выбрав калибрующую толщину прграничного слоя, как в работе [3]: $h^2 = \nu x/V(x)$, сведем уравнения (1) к одному уравнению:

$$F_{\eta\eta\eta} = \frac{xV'(x)}{V(x)}\left(F_\eta^2 - 1 - \frac{1}{2}FF_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{2}FF_{\eta\eta} + x(F_\eta F_{x\eta} - F_x F_{\eta\eta}). \tag{3}$$

Когда $V(x) = xe^{\varphi(x)}$ (этот случай соответствует обтеканию однородным на бесконечности потенциальным потоком крылового профиля с закругленной передней кромкой), оно принимает вид

$$F_{\eta\eta\eta} = F_\eta^2 - 1 - FF_{\eta\eta} + \varphi'(x)\left(F_\eta^2 - 1 - \frac{1}{2}FF_{\eta\eta}\right) + x(F_\eta F_{x\eta} - F_x F_{\eta\eta}). \tag{3a}$$

Функция $\varphi(x)$ должна в этом случае удовлетворять условию $\varphi'(0) = 0$.

Граничные условия перепишутся в виде

$$\eta = 0: \quad F = F_\eta = 0, \qquad \eta \to \infty: \quad F_\eta \to 1. \tag{4}$$

Если $V' \equiv 0$ (этот случай обычно трактуется как обтекание тонкой полубесконечной пластины), то уравнение (3) принимает вид

$$F_{\eta\eta\eta} = -\frac{1}{2}FF_{\eta\eta} + x(F_\eta F_{x\eta} - F_x F_{\eta\eta}). \tag{5}$$

Оно имеет точное решение вида $F(x, \eta) = f_0(\eta)$, где функция $f_0(\eta)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $f_0''' = -(1/2)f_0 f_0''$ и граничным условиям $f_0(0) = f_0'(0) = 0$, $f_0'(\infty) = 1$ (решение Блазиуса [1, с. 113–123]). Однако это решение имеет «щербинку»: $\partial u/\partial y \to \infty$ при $x \to 0$ (заметим, что в данном случае $|u_{xx}|_{y=\mathrm{const}\to\infty}$ при $x \to 0$, так как $\partial\eta/\partial x = -(1/2)\eta/x$).

Отмеченное обстоятельство не имеет решающего значения, однако у гидродинамиков оно вызывает ощущение дискомфорта. Поэтому делались попытки его разъяснить [4, 5].

Можно попытаться его обойти, рассмотрев случай, когда скорость внешнего потока задается формулой $V(x) = \mathrm{th}\,(x/x_0)$. Здесь x_0 — положительная величина, задаваемая по нашему усмотрению.

Эту задачу можно рассматривать как задачу об обтекании полубесконечной пластины конечной толщины с закругленной передней кромкой.

Заменив в уравнении (3) x на $\xi = (1/2)(x/x_0)$, приведем его к виду

$$F_{\eta\eta\eta}(x,\eta) = \chi(\xi)\left(F_\eta^2 - 1 - \frac{1}{2}FF_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{2}FF_{\eta\eta} + \xi(F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}). \qquad (*)$$

Здесь $\chi(\xi) = \xi/\mathrm{sh}\,\xi$. Функция $\varphi(\xi)$ представляется в виде ряда

$$\chi(\xi) = 1 + b_1\xi^2 + b_2\xi^4 + b_3\xi^6 + b_4\xi^8 + \dots = b_\alpha\xi^{2\alpha}, \qquad \alpha = 0, 1, \dots,$$

и решение уравнения $(*)$ тоже ищется в виде ряда $F(\xi,\eta) = f_\alpha(\eta)\xi^{2\alpha}$.

Вставив его в уравнение $(*)$ и приравнивая множители при одинаковых степенях ξ в левой и правой частях уравнения $(*)$, получим обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $f_i(\eta)$.

Краевые условия представляются в виде

$$i = 0: \quad f_0(0) = f_0'(0) = 0; \qquad f_0'(\infty) = 1; \quad i \geqslant 1: \quad f_i(0) = f_i'(0) = 0; \qquad f_i'(\infty) = 0.$$

Решение уравнения $(*)$ было найдено в седьмом приближении, т. е. в виде

$$F(\xi,\eta) = f_0(\eta) + \xi^2 f_2(\eta) + \xi^4 f_4(\eta) + \dots + \xi^{12} f_{12}(\eta) + \xi^{14} f_{14}(\eta).$$

Скорость внешнего течения $V(\xi) = \mathrm{th}\,\xi$ представляется таблицей.

ξ	0,000	0,500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	3,500	4,000	4,500	5,000
$V(\xi)$	0,000	0,462	0,762	0,905	0,964	0,987	0,995	0,998	0,999	1,000	1,000

Функция $\chi(\xi) = \xi/\mathrm{sh}\,\xi$ задавалась шестью членами своего ряда

$$\chi(\xi) = \beta_0 + \beta_2\xi + \beta_4\xi^4 + \beta_6\xi^6 + \beta_8\xi^8 + \beta_{10}\xi^{10}.$$

Здесь $\beta_0 = 1,00000000$, $\beta_2 = -0,16666667$, $\beta_4 = 0,01944444$, $\beta_6 = -0,00205026$, $\beta_8 = 0,00020999$, $\beta_{10} = -0,00002134$.

Касательное напряжение $\tau(\xi)$ на обтекаемой поверхности выражается формулой

$$\tau(\xi) = \frac{V(\xi)}{h(\xi)}F_{\eta\eta}(\xi,0) = \mathrm{th}\,\xi\sqrt{\frac{\mathrm{th}\,\xi}{\xi}}(f_0''(0) + f_2''(0)\xi^2 + \dots + f_{12}''(0)\xi^{12} + f_{14}''(0)\xi^{14}).$$

Здесь $f_i''(0) = \omega_i$, $\omega_0 = 1,23258766$, $\omega_2 = -0,08714695$, $\omega_4 = 0,00712903$, $\omega_6 = -0,00058456$, $\omega_8 = 0,00005022$, $\omega_{10} = -0,00000449$, $\omega_{12} = -0,00000048$, $\omega_{14} = 0,00000001$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: ИЛ, 1956, 528 с.
2. *Хайретдинов Э. Ф.* Новый подход к решению задачи о течении в пограничном слое. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 4, с. 724–726.
3. *Шкадов В. Я.* Об интегрировании уравнений пограничного слоя. — Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 4, с. 730–732.
4. *Кочин Н.Е.* Задача об обтекании вязкой жидкостью полубесконечной пластины. Собр. соч., т. 2, с. 493–597. Изд. АН СССР, 1949.
5. *Carrier G. F.*, *Lin C. C.* On nature of the boundary layer near the leadihg edge of a flat plate. — Quart. Appl. Math., 1948, v. 6, p. 63–68.