Г. А. Свиридюк, И. А. Плюхина (Челябинск, ЮУрГУ). **Фазовое пространство одной модели реакции–диффузии.**

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга E_j имеет длину $l_j > 0$ и площадь поперечного сечения $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим систему полулинейных уравнений

$$v_{jt} = \alpha v_{jxx} + \gamma - (\delta+1)v_j + v_j^2 w_j, \quad 0 = \beta w_{jxx} + \delta v_j + v_j^2 w_j, \tag{1}$$

которая служит моделью реакции–диффузии [1] в трубчатом реакторе. Здесь каждая функция $v_j = v_j(x,t)$ и $w_j = w_j(x,t)$, $x \in (0, l_j)$ и $t \in \mathbf{R}_+$, удовлетворяет условиям непрерывности

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \quad E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), \quad E_m, E_n \in E^{\omega}(V_i), \tag{2}$$

и условиям баланса потоков

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0 \tag{3}$$

в вершинах графа. Здесь $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначает множество ребер с началом (концом) в вершине V_i, $t \in \mathbf{R}$.

Редуцируем задачу (1)–(3) к полулинейному уравнению соболевского типа [2]

$$L\dot{u} = Mu + N(u). \tag{4}$$

Для этого построим банахово пространство $\mathfrak{H} = \{h = (h_1, h_2, \dots, h_j, \dots)\colon\ h_j^2 \in W_2^2(0,l_j)$ и удовлетворяет (2), (3)$\}$ с нормой $\|h\|^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (h_{jxx}^2 + h_{jx} + h_j^2)\,dx$. Формулой $\langle Ch, g\rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} h_{jxx} g_j dx$, $h, g \in \mathfrak{H}$, зададим оператор $C\colon\ \mathfrak{H} \to L_2(\mathbf{G})$. Посторим пространства $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = L_2(\mathbf{G}) \times L_2(\mathbf{G})$ и зададим операторы $[Lu, \zeta] = \langle v, \xi\rangle$, $[Mu, \zeta] = \alpha\langle Cv, \xi\rangle + \beta\langle Cw, \eta\rangle$, где $[\cdot,\cdot]$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbf{G}) \times L_2(\mathbf{G})$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *При любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}\backslash\{0\}$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, $\ker L = \{0\} \times L_2(\mathbf{G})$, $\operatorname{im} L = L_2(\mathbf{G}) \times \{0\}$, а оператор $M \in \mathrm{Cl}\,(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $\operatorname{dom} M = \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$.*

Построим пространство $\mathfrak{U}_\alpha = \mathfrak{R} \times \mathfrak{H}$. Очевидно, $\mathfrak{U}_\alpha$ — интерполяционное пространство «между» $\mathfrak{U}$ и $\operatorname{dom} M$ ($\alpha = 1/2$). Зададим теперь оператор N

$$[Nu, \zeta] = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\gamma - (\delta+1)v_j + v_j^2 w_j)\xi_j\,dx + \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\delta v_j - v_j^2 w_j)\eta_j\,dx.$$

Лемма 2. *При любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$, $\gamma, \delta \in \mathbf{R}$ оператор M $(L,0)$-секториален, а оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}_\alpha; \mathfrak{F})$.*

Редукция задачи (1)–(3) к уравнению (4) закончена. Построим множество

$$\mathfrak{W} = \left\{ u \in \mathfrak{U}_\alpha\colon \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\beta w_{jxx} + \delta v_j - v_j^2 w_j)\eta_j\,dx = 0 \right\}.$$

Определение [3]. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}_\alpha$ называется *фазовым пространством* уравнения (4), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (4) лежит во множестве $\mathfrak{P}$ поточечно, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P}$, $t \in (0; \tau)$;

(ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи Коши $u(0) = u_0$ для уравнения (4).

Множество $\mathfrak{W}$ — кандидат на роль фазового пространства задачи (1)–(3).

Теорема. *Пусть точка* $u_0 = (v_0, w_0) \in \mathfrak{W}$, *причем*

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\beta w_{jxx} - v_{0j}^2 w_j)\eta_j \, dx \neq 0$$

при всех $w, h \in \mathfrak{H} \setminus \{0\}$. *Тогда существует окрестность* $O_{u_0} \subset \mathfrak{W}$, *лежащая в фазовом пространстве задачи* (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М: URSS, 2006.
2. *Sviridyuk G. A.*, *Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. *Свиридюк Г. А.* Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором. — Алгебра и анализ, 1994, т. 6, № 5, с. 252–272.