**Ф. К. А л и е в, А. М. Б о р о д и н, А. В. К л ю е в** (Москва, ТВП). **К вопросу о сепарабельности состояний многокубитных квантовых систем.**

В случаях трех и более кубитных квантовых систем появляются противоречивые ситуации в смысле одновременной сепарабельности и несепарабельности состояния в зависимости от принимаемого порядка следования подсистем квантовой системы. Причиной этому являются, наряду с другими обстоятельствами, и принятые в современной теории квантовой информации определения понятий *сепарабельности* и *несепарабельности* (используются также понятия *незапутанности* и *запутанности* соответственно) состояний, сформулированные и адекватно отражающие ситуацию только для двухкомпонентных квантовых систем [1, 2]. Указанные определения не вполне пригодны для изучения связей между подсистемами квантовых систем, имеющими в своем составе более, чем две подсистемы. Картина связей между подсистемами в этих случаях более сложная, чем у двухкомпонентных систем, и она пока еще мало изучена. В связи с этим уместно процитировать следующее положение из работы [1]: «... следует отметить, что пока изучение запутанности только начинается, и не совсем ясно, насколько улучшится наше понимание квантовых вычислений и квантовой информации в результате изучения количественных мер запутанности. Мы сносно понимаем свойства чистых состояний квантовых систем из двух компонент, но очень плохо разбираемся в системах, состоящих из трех и более компонент... Улучшение понимания запутанности и распространение полученных результатов на квантовые алгоритмы, исправление квантовых ошибок и квантовую связь являются основными вопросами в области квантовых вычислений и квантовой информации!».

Сложности, возникающие при исследовании состояний многокубитной квантовой системы, в связи с невозможностью представления в виде тензорных произведений ее состояний при одновременным учете всех возможных конфигураций связи между составными компонентами системы можно преодолеть путем уточнения понятий сепарабельности и несепарабельности по отношению к состояниям многокубитных систем, один из вариантов которого представляется следующим образом.

Пусть $A_1A_2\dots A_n$ — квантовая система, состоящая из $n$ однокубитных квантовых систем $A_1, A_2, \dots, A_n$; $S_n$ — симметрическая группа подстановок [1] на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$; $M$ — множество разбиений натурального числа $n$ на $t$ слагаемых, где $t \in \{2, 3, \dots, n\}$, т. е. $M$ — множество таких упорядоченных наборов натуральных чисел $(k_1, k_2, \dots, k_t)$, что справедливо равенство $k_1 + k_2 + \dots + k_t = n$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $m_{n,t}^{(j)} \in M_n^{(t)}$, $m_{n,t}^{(j)} = (k_1, k_2, \dots, k_t)$, $j \in \{1, 2, \dots, |M_n^{(t)}|\}$, $|M_n^{(t)}|$ — мощность множества $M_n^{(t)}$, $t \in \{2, 3, \dots, n\}$; $s \in S_n$. Состояние $|\Psi\rangle \in \mathbf{C}^{2^n}$ $n$-кубитной квантовой системы $A_1A_2\dots A_n$ называется $(s; m_{n,t}^{(j)})$-*сепарабельным состоянием*, если для состояния $|\Psi^{(s)}$ квантовой системы

$$\begin{gathered} A_{s(1)}A_{s(2)}\dots A_{s(k_1)}A_{s(k_1+1)}\dots A_{s(k_1+k_2)}A_{s(k_1+k_2+1)}\dots A_{s(k_1+k_2+\dots+k_{t-1})} \\ A_{s(k_1+k_2+\dots+k_{t-1}+1)}\dots A_{s(n)} \end{gathered} \tag{1}$$

верно равенство $|\Psi^{(s)}\rangle = |\Psi_{1,k_1}^{(s)}\rangle \otimes |\Psi_{2,k_2}^{(s)}\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_{t,k_t}^{(s)}\rangle$, где $\mathbf{C}^{2^n}$ — гильбертово пространство размерности $2^n$ над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, $|\Psi_{i,k_i}^{(s)}\rangle$ — состояние подсистемы $A_{s(k_1+k_2+\dots+k_{t-1}+1)}A_{s(k_1+k_2+\dots+k_{t-1}+2)}\dots A_{s(k_1+k_2+\dots+k_t)}$ квантовой системы (1), $i = 1, 2, \dots, t$.

Состояние $|\Psi\rangle$ $n$-кубитной квантовой системы $A_1A_2\dots A_n$ называется $(s; m_{n,t}^{(j)})$-*несепарабельным состоянием*, если оно не является $(s; m_{n,t}^{(j)})$-сепарабельным состоянием.

В свете уяснения эффективности сформулированного определения полезно рассмотреть случай трехкубитной квантовой системы. Поэтому положим далее $n = 3$, т. е. мы имеем дело с трехкубитной квантовой системой $A_1A_2A_3$, и симметрическая группа подстановок $S_3$ состоит из следующих подстановок: $s_0 = \binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}$, $s_1 = \binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$, $s_2 = \binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$, $s_3 = \binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$, $s_4 = \binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$, $s_5 = \binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$. Множество возможных разбиений числа $n = 3$ на $t \in \{2,3\}$ слагаемых состоит из следующих разбиений: $m^{(1)}_{3,2} = (1,2)$, $m^{(2)}_{3,2} = (2,1)$, $m^{(1)}_{3,3} = (1,1,1)$.

Напомним, что в вычислительном базисе произвольное трехкубитное состояние $|\Psi\rangle \in \mathbf{C}^8$ можно представить в следующем общем виде:

$$|\Psi\rangle = a_0|000\rangle + a_1|001\rangle + a_2|010\rangle + a_3|011\rangle + a_4|100\rangle + a_5|101\rangle + a_6|110\rangle + a_7|111\rangle,$$

где $a_i \in \mathbf{C}$, $i = 0,1,\ldots,7$, $\sum_{i=0}^{7}|a_i|^2 = 1$.

Поставим задачу определения, каким условиям должны удовлетворять координаты $a_i$ $(i = 0,1,\ldots,7)$ состояния $|\Psi\rangle$ квантовой системы $A_1A_2A_3$, при выполнении которых состояние $|\Psi\rangle$ является $(s_i; m^{(j)}_{3,t})$-сепарабельным состоянием, где $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$; $t \in \{2,3\}$; $j \in \{1,2\}$ при $t = 2$; $j = 1$ при $t = 3$.

Через координаты состояния $|\Psi\rangle$ определим следующие наборы величин (обозначив $q_{ijkl} = a_ia_j - a_ka_l$, $i,j,k,l \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$):

$$\begin{aligned}
V^{(0)}_{21} &= \{q_{0514}, q_{0624}, q_{0734}, q_{1625}, q_{1735}, q_{2736}\},\\
V^{(0)}_{22} &= \{q_{0312}, q_{0514}, q_{0716}, q_{2534}, q_{2736}, q_{4756}\},\\
V^{(0)}_{31} &= \{q_{0514}, q_{0624}, q_{0734}, q_{1625}, q_{1735}, q_{2736}, q_{0312}, q_{0716}, q_{2534}, q_{4756}\},\\
V^{(1)}_{21} &= \{q_{0312}, q_{0624}, q_{0725}, q_{1634}, q_{1735}, q_{4756}\},\\
V^{(1)}_{22} &= \{q_{0314}, q_{0312}, q_{0716}, q_{3425}, q_{4756}, q_{2736}\},\\
V^{(1)}_{31} &= \{q_{0512}, q_{0624}, q_{0725}, q_{1634}, q_{1735}, q_{4756}, q_{0514}, q_{0716}, q_{3425}, q_{2736}\}\\
,V^{(2)}_{21} &= \{q_{0514}, q_{0312}, q_{0716}, q_{3425}, q_{4756}, q_{2736}\},\\
V^{(2)}_{22} &= \{q_{0624}, q_{0514}, q_{0734}, q_{2516}, q_{2736}, q_{1735}\},\\
V^{(2)}_{31} &= \{q_{0514}, q_{0312}, q_{0716}, q_{3425}, q_{4756}, q_{2736}, q_{0624}, q_{0734}, q_{2516}, q_{1735}\},\\
V^{(3)}_{21} &= \{q_{0624}, q_{0514}, q_{0734}, q_{2516}, q_{2736}, q_{1735}\},\\
V^{(3)}_{22} &= \{q_{0312}, q_{0624}, q_{0725}, q_{1634}, q_{1735}, q_{4756}\},\\
V^{(3)}_{31} &= \{q_{0624}, q_{0514}, q_{0734}, q_{2516}, q_{2736}, q_{1735}, q_{0312}, q_{0725}, q_{1634}, q_{4756}\},\\
V^{(4)}_{21} &= \{q_{0624}, q_{0312}, q_{0756}, q_{3416}, q_{4756}, q_{1735}\},\\
V^{(4)}_{22} &= \{q_{0514}, q_{0624}, q_{0734}, q_{1625}, q_{1735}, q_{2736}\},\\
V^{(4)}_{31} &= \{q_{0624}, q_{0312}, q_{0756}, q_{3416}, q_{4756}, q_{1735}, q_{0514}, q_{0734}, q_{1625}, q_{2736}\},\\
V^{(5)}_{21} &= \{q_{0312}, q_{0514}, q_{0716}, q_{2534}, q_{2736}, q_{4756}\},\\
V^{(5)}_{22} &= \{q_{0624}, q_{0312}, q_{0725}, q_{3416}, q_{4756}, q_{1735}\},\\
V^{(5)}_{31} &= \{q_{0312}, q_{0514}, q_{0716}, q_{2534}, q_{2736}, q_{4756}, q_{0624}, q_{0725}, q_{3416}, q_{1735}\}.
\end{aligned}$$

С учетом данных наборов величин, решение выше поставленной задачи можно изложить в виде следующего утверждения.

**Утверждение.** *Состояние $|\Psi\rangle$ трехкубитной квантовой системы $A_1A_2A_3$ является $(s_i; m^{(j)}_{3,t})$-сепарабельным состоянием тогда и только тогда, когда равны нулю все величины из набора $V^{(i)}_{tj}$, где $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$; $t \in \{2,3\}$; $j \in \{1,2\}$ при $t = 2$; $j = 1$ при $t = 3$.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нильсен М.*, *Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: Мир, 2006, 824 с.
2. *Прескилл Дж.* Квантовая информация и квантовые вычисления. Т. 1. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хоатическая динамика», 2008, 464 с.