Т. А. Б е л к и н а, **М. А. Г а в р и л о в а** (Москва, ЦЭМИ РАН, МИЭМ). **Асимптотически оптимальные управления инвестициями в модели страхования Крамера–Лундберга.**

Исследуются асимптотики вероятности разорения при больших значениях начального капитала в модели Крамера–Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований в случае положительной процентной ставки и при вложении любого постоянного количества средств в акции, описываемые геометрическим броуновским движением.

Рассмотрим классический процесс риска

$$R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Z_k, \tag{1}$$

где R_t — величина капитала страховой компании в момент времени t $(t \geqslant 0)$, u — величина начального капитала, c — скорость поступления страховых взносов (премий), N_t $(t \geqslant 0)$ — пуассоновский процесс с параметром λ, определяющий для каждого t число предъявленных исков за временной промежуток $(0, T]$; $Z_1, Z_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.) с некоторой функцией распределения $F(z)$ $(F(0) = 0$, $\mathbf{E}\, Z_1 = m < \infty)$, представляющих собой величины последовательных страховых выплат, которые, кроме того, не зависят от процесса $\{N_t\}$.

Предполагается, что в каждый момент времени капитал (частично, или полностью, или вместе с заемными средствами) инвестируется в акции, цена которых описывается при помощи геометрического броуновского движения: $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dw_t)$, где S_t — цена акции в момент t, μ — ожидаемая доходность акции, $\sigma > 0$ — волатильность, $\{w_t\}$ — стандартный винеровский процесс. Будем также считать, что оставшаяся часть капитала вкладывается в банк при постоянной процентной ставке r, $0 \leqslant r < \mu$ (или имеются заимствования при той же ставке); уравнение динамики банковского счета при этом имеет вид $dB_t = rB_t$. Если в каждый момент времени t в акции вкладывается количество денежных средств M_t, то изменение капитала описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dX_t = (rX_t + (\mu - r)M_t)\, dt + \sigma M_t\, dw_t + dR_t$, $X_0 = u$. Обозначим $\varphi(u) = \mathbf{P}\{X_t \geqslant 0, t \geqslant 0\}$ вероятность неразорения процесса X_t на бесконечном интервале времени, тогда $\psi(u) = 1 - \varphi(u)$ есть вероятность разорения. В [1] было показано, что при $r = 0$

$$M_t \equiv M = \frac{\mu}{\widehat{R}\sigma^2}, \tag{2}$$

где $\widehat{R}$ — положительный корень характеристического уравнения $\lambda\, \mathbf{E}\, [e^{\widehat{R}Z}] = c\widehat{R} + \lambda + \mu/(2\sigma^2)$ (здесь Z — с. в., определяющая размер одного иска, с конечным экспоненциальным моментом), имеет место аналог неравенства Лундберга для соответствующей вероятности разорения: $\psi(u) \leqslant e^{-\widehat{R}u}$. При этом в [2] в случае экспоненциального распределения размеров требований доказано утверждение о том, что константа, определенная в (2), является предельным количеством при использовании оптимальной стратегии, минимизирующей вероятность разорения, и тогда верно асимптотическое представление

$$\psi(u) = 1 - Ke^{-\widehat{R}u}(1 + o(1)), \qquad u \to \infty, \tag{3}$$

где K — некоторая константа.

В работе, представленной данным докладом, показано, что если $F(x) = 1 - e^{-x/m}$, $m > 0$, $M_t \equiv M > 0$, то при $r > 0$ верно $\varphi(u) = 1 - K_1 e^{-u/m} u^{\lambda/r - 1}(1 + o(1))$, $u \to \infty$, где K_1 — константа (возможно, зависящая от M). Такое же представление верно и для оптимальной стратегии (см. [2]), и для $M_t \equiv 0$.

Приведем также асимптотики вероятности неразорения при $r = 0$ и $M_t \equiv M > 0$. Можно показать, что при $c - \lambda m + M\mu > 0$ верно представление $\varphi(u) = 1 - K_2 e^{\nu_2 u}(1 + o(1))$, $u \to \infty$, где $K_2 > 0$,

$$\nu_2 = \frac{-d_2 + \sqrt{d_2^2 - 4d_1}}{2}, \quad d_1 = \frac{2(-\lambda m + c + M\mu)}{mM^2\sigma^2}, \quad d_2 = \frac{2c}{M^2\sigma^2} + \frac{2\mu}{M\sigma^2} + \frac{1}{m}.$$

Если при этом M определяется соотношением (2), то отсюда получим представление вида (3).

Если же $c - \lambda m + M\mu \leqslant 0$, то процесс изменения капитала не имеет положительного сноса, и в этом случае можно показать, что $\varphi(u) = 0$.

Работа поддержана РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gaier J.*, *Grandits P.*, *Schachermayer W.* Asymptotic ruin probabilities and optimal investment. — Ann. Appl. Probab., 2003, v. 13, № 3, p. 1054–1076.
2. *Белкина Т. А.*, *Конюхова Н. Б.*, *Куркина А. О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования. II. Модель Крамера–Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2010, т. 17, в. 1, с. 3–24.