

**В. А. Б а б а й ц е в, А. В. Б р а и л о в, В. Ю. П о п о в** (Москва, Финуниверситет). **Быстрый алгоритм метода критических линий Марковица.**

Метод критических линий [2] лауреата Нобелевской премии по экономике Г. Марковица является классическим для построения минимальной границы и нахождения оптимальных портфелей рискованных активов в рамках парадигмы «ожидаемая доходность–риск» («mean–variance»). В последнее время возник интерес к повышению производительности алгоритмов получения минимальной границы. В ряде работ [3, 4, 6] такие алгоритмы были использованы для нахождения статистически устойчивых оптимальных портфелей методом усреднения (resampling).

Быстрый алгоритм, основанный на методе критических линий, недавно предложили Андраш и Даниэль Нидермайеры (см. [5]). Тестирование показало, что он на несколько порядков быстрее всех известных до этого алгоритмов. В работе, представленной данным докладом, мы приводим алгоритм построения минимальной границы для задачи Марковица с условием неотрицательности долей оптимального портфеля [1], который требует примерно в полтора раза меньше итераций, чем алгоритм Нидермайеров. Для этого нам пришлось проделать более тщательное геометрическое и аналитическое исследование задачи Марковица.

Для сравнения производительностей оба алгоритма (наш — Frontier и Нидермайеров — Niedermayer) были запрограммированы с помощью программы MatCalc (Матричный Калькулятор) (см. также <http://www.matcalc.ru/>). Для каждой размерности ковариационной матрицы от 10 до 100 с шагом 10, сформированной по тому же правилу, как в [5], было подсчитано среднее число итераций и среднее число угловых точек. Соответствующие результаты приведены в следующей таблице (результаты указаны только для размерностей, начиная с 60).

$n$	Frontier			Niedermayer		
	$t$ (с)	$ntp$	$nit$	$t$ (с)	$ntp$	$nit$
60	0,6	37	1314	1,4	37	1999
70	1,0	44	1876	2,2	44	2751
80	1,1	46	2275	2,4	46	3319
90	1,6	50	2818	3,9	50	4128
100	2,0	55	3431	5,2	55	5061

Здесь  $t$  — среднее время решения одной задачи,  $ntp$  — среднее число угловых точек,  $nit$  — среднее число итераций. Из таблицы видно, что число итераций примерно в полтора раза меньше, а время решения одной задачи уменьшается более, чем в два раза.

В настоящее время ведутся работы по программированию нашего алгоритма на языке C++. Соответствующая программа будет доступна в Интернете на указанном ресурсе <http://www.matcalc.ru/>.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабайцев В. А., Гусин В. Б.* Математические основы финансового анализа. М.: ФА, 2005.
2. *Markowitz H. M.* Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. New York: Wiley, 1991, Basil Blackwell, Cambridge, MA, 1959.
3. *Markowitz H. M., Usmen N.* Resampled Frontiers vs Diffuse Bayes: An Experiment. — Journal of Investment Management, 2003, v. 1, № 4, p. 9–25.
4. *Michaud R.* Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization. Oxford: Oxford University Press, 1998.

5. *Niedermayer A., Niedermayer D.* Applying Markowitz's Critical Line Algorithm in «Handbook of Portfolio Construction. Contemporary Applications of Markowitz Techniques», ed. by B. John Guerard, Jr., Springer, 2010.
6. *Scherer B.* Portfolio Resampling: Review and Critique. — *Financial Analysts Journal*, 2002, v. 58, № 6, p. 98–109.