И. В. Мисюра (Ростов-на-Дону, ЮФУ). **Один метод фильтрации случайного сигнала.**

Наблюдается случайный процесс $X(t,\omega)$, который дискретизируется с заданным шагом, и получаем вектор $\mathbf{X}(\omega)$ размерности n, $X(t,\omega) \to \mathbf{X}(\omega)$. Вектор $\mathbf{X}(\omega)$ представим в виде $\mathbf{X}(\omega) = Y(\omega) + N(\omega)$, где $Y(\omega)$ — сигнал, $N(\omega)$ —шум, причем $N(\omega) \in \mathbf{N}(0, \sigma^2_{\text{шума}} E)$ является нормально распределенным случайным вектором.

Пусть $y_{i+1} - y_i = r_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда

$$AY = R, \tag{1}$$

где R является нормально распределенным случайным вектором ($R \in \mathbf{N}(0, \sigma^2_{\text{сигн.}} E)$) и матрица A является теплицевой, т. е.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для выделения сигнала применим метод максимального правдоподобия Фишера.

Условная вероятность вычисляется по формуле

$$P(X|Y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\sigma^2_{\text{шума}})^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2_{\text{шума}}} (Y - X, Y - X) \right\},$$

$$P(Y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\sigma^2_{\text{шума}})^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2_{\text{шума}}} (C_Y^{-1} Y, Y) \right\},$$

где C_Y — ковариационная матрица вектора Y.

Для нахождения максимально правдоподобной оценки вектора Y, выполнив преобразования, перейдем к решению задачи

$$\frac{1}{\sigma^2_{\text{шума}}} (Y - X, Y - X) + (C_Y^{-1} Y, Y) \to \min_Y .$$

Решая поставленную задачу, получаем

$$Y = \left(E + \frac{\sigma^2_{\text{шума}}}{\sigma^2_{\text{сигн.}}} A^T A \right)^{-1} X.$$

Из (1) следует, что $A^T A$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $H = E + (\sigma^2_{\text{шума}}/\sigma^2_{\text{сигн.}}) A^T A$. Тогда $Y = H^{-1} X$. Найдем обратную матрицу H^{-1}. Очевидно, H — симметричный линейный оператор и $H = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i u_i^T$, где λ_i — собственные числа, u_i — собственные нормированные векторы матрицы H. Поэтому $H^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} u_i u_i^T$ (при условии, что $\lambda_i \neq 0$).

Найдем собственные числа матрицы H. Воспользуемся для этого работой Белмана, посвященной специальным вычислительным методам [1]. Собственные значения λ_j матрицы H равны

$$\lambda_j = 2\left\{1 - \cos\left[\frac{j\pi}{n+1}\right]\right\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Столбцы матрицы $F = (f_{ij})$ являются ненормированными собственными векторами матрицы H. Элементы матрицы F определяются выражением $f_{ij} = \sin[ij\pi/(n+1)]$. Столбцы матрицы F — собственные векторы матрицы H.

Основным результатом данной работы является вычислительно эффективный алгоритм обращения матрицы H, который может быть использован не только в задачах фильтрации сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.*, *Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Мир, 1974, 205 с.