В. В. Венгеров (Ростов-на-Дону, РГУПС). **Быстрые методы и алгоритмы распределенного тестирования аппаратных комплексов в режиме реального времени.**

В качестве быстрого метода распределенного тестирования аппаратных комплексов применим метод, основанный на быстром преобразовании Фурье. Быстрое преобразование Фурье (БПФ) — это алгоритм вычисления преобразования Фурье для дискретного случая. В отличие от простейшего алгоритма, который имеет сложность порядка $O\,(N^2)$, БПФ имеет сложность всего лишь $O\,(N \log_2 N)$. Алгоритм БПФ был впервые опубликован в 1965 году в статье Кули (Cooly) и Тьюки (Tukey). Покажем, как выполнить дискретное преобразование Фурье за $O\,(N(p_1+p_2+\dots+p_n))$ действий при $N = p_1p_2\cdots p_n$. В частности, при $N = 2^n$ понадобится $O\,(N\log(N))$ действий. Дискретное преобразование Фурье преобразует набор чисел $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ в такой набор чисел $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, что $b_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_i\varepsilon^{ij}$, где $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^k \neq 1$ при $0 < k < n$. Алгоритм быстрого преобразования Фурье применим к любым коммутативным ассоциативным кольцам с единицей. Чаще всего этот алгоритм применяют к полю комплексных чисел (с $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$) и к кольцам вычетов. Основной шаг алгоритма состоит в сведении задачи для N чисел к задаче для $p = N/q$ чисел, где q — делитель N. Пусть мы уже умеем решать задачу для N/q чисел. Применим преобразование Фурье к наборам $a_i, a_{q+i}, \dots, a_{q(p-1)+i}$ для $i = 0, 1, \dots, q-1$.

Покажем теперь, как за $O\,(Np)$ действий решить исходную задачу. Заметим, что $b_i = \sum_{j=0}^{q-1} \varepsilon^{ij}(\sum_{k=0}^{p-1} a_{kq+j}\varepsilon^{ki_q})$. Выражения в скобках нам уже известны — это $i\,(\mathrm{mod}\,p)$-е число после преобразования Фурье j-й группы. Таким образом, для вычисления каждого b_i нужно $O\,(q)$ действий, а для вычисления всех b_i нужно $O\,(Nq)$ действий, что и требовалось получить. Для обратного преобразования Фурье можно применять алгоритм прямого преобразования Фурье, нужно лишь использовать ε^{-1} вместо ε (или применить операцию комплексного сопряжения вначале к входным данным, а затем к результату, полученному после прямого преобразования Фурье) и окончательный результат поделить на N. Общий случай может быть сведен к предыдущему. Пусть $4N > 2^k \geqslant 2N$. Заметим, что $b_i = \varepsilon^{-i^2/2}\sum_{j=0}^{N-1} \varepsilon^{(i+j)^2/2}\varepsilon^{-j^2/2}a_j$. Обозначим $\overline{a}_i = \varepsilon^{-i^2/2}a_i$, $\overline{b}_i = \varepsilon^{i^2/2}b_i$, $c_i = \varepsilon^{(2N-2-i)^2/2}$. Тогда $\overline{b}_i = \sum_{j=0}^{2N-2-i} \overline{a}_j c_{2N-2-i-j}$, если положить $\overline{a}_i = 0$ при $i \geqslant N$. Таким образом, задача сведена к вычислению свертки, но это можно сделать с помощью трех преобразований Фурье для 2^k элементов. Выполняем прямое преобразование Фурье для $\{\overline{a}_i\}_{i=0}^{2^k-1}$ и $\{c_i\}_{i=0}^{2^k-1}$, перемножаем поэлементно результаты и выполняем обратное преобразование Фурье. Вычисления всех $\overline{a}_i$ и c_i требуют $O\,(N)$ действий, три преобразования Фурье требуют $O\,(N\log(N))$ действий, перемножение результатов преобразований Фурье требует $O\,(N)$ действий, вычисление всех b_i, зная значения свертки, требует $O\,(N)$ действий. Итого, для дискретного преобразования Фурье требуется $O\,(N\log(N))$ действий для любого N. Этот алгоритм быстрого преобразования Фурье может работать над кольцом, только когда известны первообразные корни из единицы степеней $2N$ и 2^k. Дискретное преобразование Фурье для вектора $\mathbf{x}$, состоящего из N элементов, имеет вид $\mathbf{X} = A\mathbf{x}$, элементы матрицы A имеют вид $a_N^{mn} = e^{-2\pi imn/N}$. В результате получаем окончательный вид функции тестирования: $X_m = \sum_{n=0}^{M-1} x_{2n}a_M^{nm} + e^{-2\pi im/N}\sum_{n=0}^{M-1} x_{2n+1}a_M^{nm}$.