Н. О. С е д о в а (Ульяновск, УлГУ). **Исследование устойчивости в многосвязных нелинейных эредитарных системах на основе принципов сведения.**

Задача анализа устойчивости и стабилизации заданных состояний эредитарных многосвязных систем возникает при исследовании моделей различных процессов. Например, взаимодействие нескольких биологических видов согласно модели типа Лотки–Вольтерра описывается системой вида [4]:

$$\dot{x}_i(t) = a_i(t)x_i(t)\left[\alpha_i - \beta_i x_i(t) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-r(t)}^{0}\gamma_{ij}(s)x_j(t+s)\,ds\right], \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Для этой и других, более общих систем уравнений запаздывающего типа обоснован метод получения достаточных условий устойчивости и асимптотической устойчивости положения равновесия на основе анализа свойств устойчивости для определенным образом построенных систем меньшей размерности и более простой структуры. Утверждения такого рода традиционно называются принципами сведения [2]. Доказательство полученных результатов основано на применении модифицированного метода функций Ляпунова–Разумихина и метода предельных уравнений [1].

Пусть $\mathbf{R}^+ = [0,+\infty)$, $\mathbf{R}^m$ — действительное линейное пространство m-векторов с нормой $|\cdot|$, $r>0$ — фиксированная постоянная. Определим пространство $C := C([-r,0],\mathbf{R}^m)$ функций φ с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)|\colon\ -r \leqslant s \leqslant 0\}$ и множества $C_a = \{\varphi\in C\colon\ \|\varphi\| < a\}$, $\overline{C}_a = \{\varphi\in C\colon\ \|\varphi\|\leqslant a\}$ для произвольного $a>0$.

В введенных обозначениях исследуется неавтономное функционально-дифференциальное уравнение (ФДУ) запаздывающего типа вида

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t), \tag{1}$$

где $\dot{x}(t)$ — правосторонняя производная, $f\colon\ \mathbf{R}^+\times C_H \to \mathbf{R}^m$, $x_t\in C$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s)$, $-r\leqslant s\leqslant 0$. Предполагается, что $f(t,0)=0$ и правая часть уравнения (1) удовлетворяет условиям типа Каратеодори из [3], обеспечивающим, помимо стандартных результатов о существовании, единственности, продолжимости, непрерывной зависимости, возможность построения предельных уравнений.

Пусть $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^m$, $x_i\in\mathbf{R}^{n_i}$, $m=\sum_{i=1}^n n_i$. В сделанных предположениях получены, в частности, следующие результаты.

Теорема 1. *Если нулевые решения систем* $\dot{x}_i(t) = (A_i+B_i)x_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, *асимптотически устойчивы, то равномерно асимптотически устойчиво нулевое решение системы*

$$\dot{x}_i(t) = \overline{A}_i(t)x_i(t) + \overline{B}_i(t)x_i(t-r_i(t)) + C_i(t,x_t) + D_i(t,x_t) + p_i(t,x_t), \quad i=1,2,\ldots,n,$$

где $\overline{A}_i(t)\to A_i$, $\overline{B}_i(t)\to B_i$ *при* $t\to+\infty$, $|C_i(t,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_i,0,\ldots,0)|\leqslant c_i(\varphi)|\varphi_i(0)|$, $c_i(\varphi)\to 0$ *при* $|\varphi_i(0)|\to 0$, $D_i(t,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_i,0,\ldots,0)=0$, $r_i(t)\in[0,r_i]$, $r_i\geqslant 0$ — *достаточно малые,* p_i — *возмущения, удовлетворяющие условиям*:

$$\sup_{0\leqslant u\leqslant 1}\left|\int_t^{t+u} p_i(s,\varphi)\,ds\right| \to 0 \text{ при } t\to\infty \text{ для всех } \varphi\in C_H;$$

$$\text{существуют такие } r>0 \text{ и функции } b_i(s)\colon\ \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+ \text{ — неубывающие,}$$
$$b_i(0)=0 \text{ и } h_i(t)\colon\ \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+,\ \lim_{t\to\infty}\int_t^{t+1} h_i(u)\,du = 0, \text{ что} \tag{2}$$
$$|p_i(t,\varphi)-p_i(t,\psi)| \leqslant b_i(\,|\,\varphi-\psi\,|\,) + h_i(t)\ \forall t\geqslant 0,\ \varphi,\psi\in\overline{C}_{H+r}.$$

Теорема 2. *Предположим, что для каждого* i *собственные значения* $\lambda_i^1,\lambda_i^2,\ldots,\lambda_i^{n_i}$ *матрицы* B_i *действительны, различны и отрицательны,* $r_i(t)\in$

$[0, r_i]$, $-\lambda_i^k r_i < 3/2$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots, n_i$. *Тогда равномерно асимптотически устойчиво нулевое решение системы*

$$\dot{x}_i(t) = \overline{B}_i(t) x_i(t - r_i(t)) + D_i(t, x_t) + p_i(t, x_t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\overline{B}_i(t) \to B_i$ *при* $t \to +\infty$, $D_i(t, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i, 0, \ldots, 0) = 0$, p_i *удовлетворяют условиям* (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-01-97010-р-поволжье-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андреев А. С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений. Ульяновск: УлГУ, 2005.
2. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения. — Известия Академии наук СССР. Серия математическая, 1964, т. 28, с. 1297–1324.
3. *Седова Н. О.* Топологическая динамика неавтономного функционально-дифференциального уравнения с конечным запаздыванием. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 6, с. 1120–1123.
4. *Faria T.* Sharp conditions for global stability of Lotka–Volterra systems with distributed delays. — J. Differ. Eq., 2009, v. 246. p. 4391–4404.