А. Л. А р у т ю н о в (Москва, ИПУ РАН). **Аналитические методы решения некоторых стандартных задач стохастической оптимизации.**

Суть данного метода заключается в оптимизации выбора рационального момента («момента марковской остановки») для принятия того или иного управляющего воздействия. Данный метод позволяет выбрать наиболее рациональную прогнозную оценку среди прочих. Пусть $X = (X_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ — последовательно наблюдаемый непрерывный процесс, θ — (непредсказуемое) положение максимума ($X_\theta = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} X_t$). Требуется, последовательно наблюдая процесс X, найти среди моментов $\tau = \tau(X)$ со значениями в [0,1] (моменты остановки, или марковские моменты события $[\tau(x) \leqslant t]$ или $[\tau(X) > t]$ зависят лишь от «прошлых периодов» $\{X_{1,2,\ldots} \leqslant t\}$, но не зависят от будущих периодов) такой момент $\tau* = \tau^*(X)$, что $X_{\tau^*} \approx X_\theta$ или $\tau^* \approx \theta$, т. е. $\inf_\tau \mathbf{E}\,|X_\tau - X_\theta|^2 = \mathbf{E}\,|X_{\tau^*} - X_\theta|^2$ или $\inf_\tau \mathbf{E}\,|\tau - \theta| = \mathbf{E}\,|\tau^* - \theta|$. Требуется найти τ таким образом, чтобы он был ближе к максимальному значению.

В случае, когда $X = B = W$ — стандартное броуновское движение, $\tau \in [0, \Theta]$ и $\theta = \Theta$, $\tau^* = \inf\{t \leqslant 1\colon \max_{S \leqslant t} B_S - B_t \geqslant z^* \sqrt{1-t}\}$, где z^* — корень уравнения

$$4\Phi(z) - 2z\varphi(z) - 3 = 0 \tag{1}$$

с $\varphi(z) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-z^2/2}$ и $\Phi(z) = \int_{-x}^{z} \varphi(x)\,dx$. Данное уравнение имеет аналитическое и численное решение. Вкладом автора в развитие данной методики является нахождение графического решения данного уравнения при помощи геометрических методов построения, используя теоремы и аксиомы о сумме углов треугольника, взаимное расположение точки и прямой треугольника, взаимное расположение прямых, содержащих высоты треугольника (в пространстве $\mathbf{R}^2$), а также вычисления площадей вырожденного треугольника с одной, двумя или тремя несобственными вершинами в представлении геометрии Лобачевского.

Для решения уравнения (1) достаточно вычислить длину ломанной (дуги) NS, используя инварианту Римана, рассмотреть прямоугольный треугольник KNM и вычислить KM. При этом W — некий винеровский процесс на временном интервале $[0, T]$. Искомая точка M — момент остановки на интервале $[0, T]$. С точки зрения пространства Лобачевского, необходимо вычислить площадь вырожденных треугольников с одной, двумя и тремя несобственными вершинами.

Пусть $K_\infty M S'_\infty$ — вырожденный треугольник с несобственными вершинами K_∞ и S'_∞, а $M\Theta$ — высота данного треугольника (см. рис.).

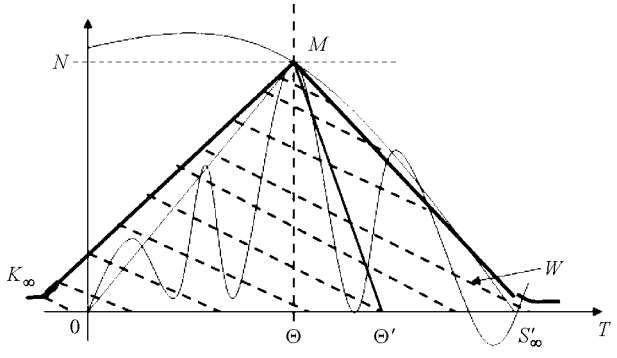

Рис. Вырожденный треугольник с двумя несобственными вершинами в пространстве Лобачевского

Данный треугольник можно рассматривать как фигуру, которая является пределом треугольника $M\Theta' K'_\infty$, где Θ' — переменная точка луча $\Theta S'_\infty$, когда $\Theta\Theta' \to \infty$. При этом площадь S треугольника $M\Theta' K_\infty$ есть функция от $\theta = \Theta\Theta'$ и предел этой функции при $\theta \to \infty$ называется площадью треугольника $K_\infty M S'_\infty$. По формуле

$S(KMS'_\infty) = \pi - \widehat{K} - \widehat{M}$ при $\theta \to \infty$ мера угла Θ' стремится к нулю, следовательно, $S(MK_\infty S'_\infty) = \pi - \widehat{M}$. Если угол M треугольника $K_\infty MS'_\infty$ — прямой, то $S(MK_\infty S'_\infty) = \pi/2$. Площадь вырожденного треугольника $K_\infty M_\infty S'_\infty$ с тремя несобственными вершинами вычисляется по формуле $S(K_\infty M_\infty S'_\infty) = \pi$.