И. С. Козак, В. И. Масол (Киев, КНУ). **Оценки распределения некоторых статистик случайного (0,1)-вектора заданной спецификации.**

Будем говорить, что n-мерный вектор имеет спецификацию $0^{m_0}\,1^{m_1}$, где $m_0 + m_1 = n$, если он содержит m_0 нулей и m_1 единиц. Обозначим $\eta_n(l)$ число l-ступеней в векторе $f = (f(1), f(2), \ldots, f(n))$, который случайно и равновероятно выбирается из множества всех векторов спецификации $0^{m_0}\,1^{m_1}$, $1 \leqslant l \leqslant n-1$. (Пара $(i, i+l)$ образует l-ступень, если компоненты $f(i)$, $f(i+l)$ вектора f удовлетворяют неравенству $f(i) > f(i+l)$).

Положим $m_0 = \alpha n$, $m_1 = \beta n$, $\alpha > 0$, $\alpha = \alpha(n)$, $\beta > 0$, $\beta = \beta(n)$, $\alpha + \beta = 1$.

В докладе формулируются две теоремы. В первой из них приводятся явные оценки снизу и сверху вероятности $\mathbf{P}\left\{(\eta_n(l) - \alpha\beta n)/\alpha\beta\sqrt{n} = \mu\right\}$ при условиях $\alpha\beta\sqrt{n} > 1$, $|\mu| + l/(\alpha\beta\sqrt{n}) < (\alpha\beta\sqrt{n})^{1/3}$. В частности, для $\alpha = \beta = 1/2$ из первой теоремы получаем следующее утверждение.

Следствие. *Если $\alpha = \beta = 1/2$, $n > 16$ и $|\mu| + 4l/\sqrt{n} < (\sqrt{n}/4)^{1/3}$, то для $\mu \geqslant 0$*

$$\frac{A(\mu_1)}{B(\mu_1)} \leqslant \sqrt{\frac{\pi n}{8}}\,\mathbf{P}\left\{(4\eta_n(l) - n)/\sqrt{n} = \mu\right\} \leqslant C(\mu)/D(\mu), \tag{1}$$

для $\mu < 0$

$$\min_{\mu \in \{\mu_1, \mu_2\}} \left\{\frac{A(\mu)}{B^*(\mu)}\right\} \leqslant \sqrt{\frac{\pi n}{8}}\,\mathbf{P}\left\{(4\eta_n(l) - n)/\sqrt{n} = \mu\right\} \leqslant \frac{C(\mu^*)}{D^*(\mu^*)},$$

где

$$A(\mu) = \exp\left\{\frac{4}{6n+1} - \frac{2}{3\sqrt{n}(\sqrt{n}+\mu)} - \frac{2}{3\sqrt{n}(\sqrt{n}-\mu)} - \frac{1}{12n}\right\},$$

$$B(\mu) = \exp\left\{\mu^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + \mu^3\left(\frac{1}{6\sqrt{n}} + \frac{1}{3n^{3/2}}\right) + \mu^4\frac{1}{6n}\right\},$$

$$C(\mu) = \exp\left\{\frac{2}{3n} - \frac{2}{3\sqrt{n}(\sqrt{n}+\mu)+1} - \frac{2}{3\sqrt{n}(\sqrt{n}-\mu+1} - \frac{1}{12n+1}\right\},$$

$$D(\mu) = \exp\left\{\mu^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) - \mu^3\frac{1}{6n^{1/2}}\left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \mu^4\frac{1}{6n}\left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right\},$$

$$B^*(\mu) = \exp\left\{\mu^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + |\mu|^3\left(-\frac{1}{6\sqrt{n}} + \frac{1}{3n^{3/2}}\right) + \mu^4\left(\frac{1}{12n}\right)\right\},$$

$$D^*(\mu) = \exp\left\{\mu^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + |\mu|^3\left(\left[-\frac{1}{3n^{1/2}}\left(1 - \frac{|\mu|}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)\right] + \mu^4\left(\frac{1}{6n}\left(1 - \frac{|\mu|}{\sqrt{n}}\right)^{-1}\right)\right)\right\},$$

$$\mu_1 = \mu + \frac{4l}{\sqrt{n}}, \quad \mu_2 = \mu, \quad \mu^* = -\frac{2}{\sqrt{n} + 2/\sqrt{n}} - \frac{4}{(n+2)\sqrt{n}}.$$

Пример 1. Если $n = 400$, $\mu = 1/2$, $l = 2$, $\alpha = \beta = 1/2$, то условия следствия выполняются и соотношение (1) дает $0,05 \leqslant \mathbf{P}\left\{(4\eta_n(l) - n)/\sqrt{n} = \mu\right\} \leqslant 0,07$. Формула для явного вида вероятности $\mathbf{P}\left\{\eta_n(l) = k\right\}$ найдена в [1]. В условиях примера эта формула позволяет установить $\mathbf{P}\left\{(4\eta_n(l) - n)/\sqrt{n} = \mu\right\} \approx 0,06$.

Во второй теореме найдены условия, при которых разность между совместным распределением случайных величин $\eta_n(1)$ и $\eta_n(2)$ и произведением распределений Пуассона допускает нетривиальные оценки сверху и снизу.

Теорема. *Пусть целые числа* z_1, z_2, m_0, m_1 $(z_1 \geqslant 0,\ z_2 \geqslant 0,\ m_0 \geqslant 1,\ m_1 \geqslant 1)$ *изменяются так, что для фиксированного* ε_0, $\varepsilon_0 \in (0,1)$, *найдется такое натуральное число* $n_0 = n_0(\varepsilon_0, z_1, z_2, m_0, m_1)$, *что для всех* $n \geqslant n_0$ *выполняется условие*

$$\max\left\{\frac{1}{m_0}\max\left\{2z_1, 2z_2, z_2^2, \frac{m_1}{m_0^2}, \frac{z_1^2 z_2 m_1}{m_0^2}\right\}, \frac{m_0}{m_1}\max\left\{2, \frac{m_0^2}{m_1}, z_1+z_2\right\}\right\} < \varepsilon_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &-\frac{\lambda^{z_1+z_2}}{z_1!\,z_2!}e^{-2\lambda}F + \frac{\lambda^{z_1+z_2}}{z_1!\,z_2!}\frac{\min\{z_1, z_2\}}{\lambda m_0}(1-\varepsilon_0)e^{-2\lambda-F} \\ &\qquad \leqslant \mathbf{P}\{\eta_n(1) = m_0 - z_1, \eta_n(2) = m_0 - z_2\} - \frac{\lambda^{z_1+z_2}}{z_1!\,z_2!}e^{-2\lambda} \\ &\qquad \leqslant \frac{\lambda^{z_1+z_2}}{z_1!\,z_2!}e^{-2\lambda+G}(G+\varepsilon_0 e^{\varepsilon_0}), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\lambda = \frac{m_0^2}{m_1}, \quad G = \frac{\varepsilon_0}{2-\varepsilon_0}\left(\frac{22}{3} - \frac{7}{2}\varepsilon_0\right),$$

$$F = \frac{\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}\left(\frac{20\varepsilon_0^2 - 87\varepsilon_0 + 72}{6(2-\varepsilon_0)} + \frac{\varepsilon_0(2+\varepsilon_0)^2(2-\varepsilon_0)}{12(4-\varepsilon_0(2+\varepsilon_0))^2}\right).$$

Пример 2. Для $z_1 = z_2 = 0$, $m_1 = 670$ и $m_0 = 10$ получаем $\lambda^{z_1+z_2}e^{-2\lambda}(z_1!z_2!)^{-1} \approx 0{,}742$. Для $\varepsilon_0 = 0{,}03$ соотношение (2) дает при $n_0 = 699$ следующие нетривиальные оценки $-0{,}14 \leqslant \mathbf{P}\{\eta_n(1) = m_0 - z_1, \eta_n(2) = m_0 - z_2\} - \lambda^{z_1+z_2}\exp\{-2\lambda\}(z_1!\,z_2!)^{-1} \leqslant 0{,}12$. Заметим, что вероятность $\mathbf{P}\{\eta_n(1) = m_0 - z_1, \eta_n(2) = m_0 - z_2\}$ может быть найдена по формуле, установленной в [2]. В условиях примера эта формула приводит к соотношению $\mathbf{P}\{\eta_n(1) = m_0 - z_1, \eta_n(2) = m_0 - z_2\} \approx 0{,}74$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Масол В. И.* О распределении некоторых статистик (0,1)-вектора. — Исследование операций и АСУ, 1987, в. 29, с. 23–27.
2. *Масол В. И.* Асимптотическое поведение некоторых статистик (0,1)-вектора. — Теория вероятн. и матем. статистика, 1990, в. 43, с. 83–90.