А. А. С и л а е в, В. М. Х а м е т о в (Москва, ЦЭМИ РАН). **Максиминное хеджирование европейского опциона на неполных рынках.**

1. Введение. Рассматривается задача расчета европейского опциона на неполном рынке. В докладе предлагается максиминный метод построения хеджирующего портфеля европейского опциона. Задачу хеджирования европейского опциона мы рассматриваем как игру двух лиц, в которой первый игрок — рынок, второй игрок управляет активами. При этом мы полагаем, что рынок минимизирует функцию полезности, а второй игрок ее максимизирует. Функцию полезности мы выбираем как экспоненциальную и зависящую от «профицита», т. е. разности между платежным обязательством и выручкой, полученной от управления активами за «время жизни» европейского опциона. Стратегиями рынка являются вероятностные меры на траекториях рисковых активов, стратегиями второго игрока — портфели активов.

2. Постановка максиминной задачи. Пусть $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}, P)$, $N_0 \stackrel{\Delta}{=} \{0, 1, \dots, N\}$ — стохастический базис, вероятностную меру P назовем базой. Пусть на стохастическом базисе задана d-мерная случайная последовательность $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_0}$, описывающая эволюцию стоимостей d рисковых активов [1]. Положим для любого $t \in N_0$: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S \stackrel{\Delta}{=} \sigma\{S_0, S_1, \dots, S_t\}$ и $\mathcal{F}_N^S = F$. Пусть $f_N : \mathbf{R}^{d(N+1)} \to \mathbf{R}^1$ — борелевская функция, обозначаемая через $f_N(x.)$, а $f_N(S.) = f_N(x.)|_{x.=S.}$ — $\mathcal{F}_N$-измеримая, ограниченная случайная величина, называемая платежным обязательством [1].

Обозначим $\mathcal{P}_N$ множество вероятностных мер на $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0})$, эквивалентных базовой мере P. Пусть $(\gamma_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_1}$, $N_1 \stackrel{\Delta}{=} \{1, 2, \dots, N\}$, есть предсказуемая d-мерная последовательность. Множество таких последовательностей обозначим U_1^N. Пусть $\widetilde{U}_1^N$ — любое подмножество множества U_1^N. Обозначим $\widetilde{U}_{t+1}^N$ $(\widetilde{U}_t)$ сужение $\widetilde{U}_1^N$ на $\{t+1, \dots, N\}$ $(\{t\})$ и будем использовать обозначение $\gamma_{t+1}^N \in \widetilde{U}_{t+1}^N$ $(\gamma \in \widetilde{U}_t)$.

Пару $(Q, \gamma_t) \in \mathcal{P}_N \times U_1^N$ назовем *бистратегией*. Обозначим

$$I^{Q,\gamma_{t+1}^N}(t, S_0^t) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{M}^Q \left[\exp\left\{ f_N(S.) - \sum_{i=t+1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

где $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$, которую назовем оценкой бистратегии (Q, γ_{t+1}^N). Стратегию $(\gamma_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_1}$ назовем *допустимой*, если $\gamma_1^N \in D_1^N \stackrel{\Delta}{=} \{\gamma_1^N \in U_1^N\colon\ |\gamma_t| \leqslant c$ для любого $t \in N_1\}$, где $c = \mathrm{const} > 0$ — такова, что $\mathbf{M}\, e^{2cS_N} \leqslant k$ $(k > 1)$. Бистратегию (Q, γ_1^N) назовем *допустимой*, если $Q, \gamma_1^N \in \mathcal{P}_N \times D_1^N$. Множество допустимых бистратегий обозначим $\mathcal{P}_N \times D_1^N$.

О п р е д е л е н и е. *Верхним гарантированным значением оценки* $I^{Q,\gamma_{t+1}^N}(t, S_0^t)$ бистратегии $(Q, \gamma_1^N) \in \mathcal{P}_N \times D_1^N$ в момент времени $t \in N_0$ назовем $\mathcal{F}_t^S$-измеримую случайную величину, определяемую равенством

$$\overline{\nu}_t^P \stackrel{\Delta}{=} P\text{-}\operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{P}_N} \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} I^{Q,\gamma_{t+1}^N}(t, S_0^t).$$

Утверждение. *Если $f_N(x.)$ — ограниченная борелевская функция, то для любого $t \in N_0$ $\overline{\nu}_t^P < \infty$ P-п. н.*

3. Приведем рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет верхнее гарантированное значение.

Теорема 1. *Пусть фильтрация $\{\mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$ универсально полна. Тогда $(\overline{\nu}_t^P, \mathcal{F}_t^S)_{t\in N_0}$ P-п. н. удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\overline{\nu}_t^P = P\text{-}\operatorname*{ess\,inf}_{Q\in\mathcal{P}_N} \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \mathbf{M}^Q \Big[\overline{\nu}_{t+1}^P e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \Big], \quad \overline{\nu}_t^P|_{t=N} = e^{f_N(S.)}. \qquad (1)$$

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любых* $t \in N_1$ *и* $Q \in \mathcal{P}_N$ P*-п. н. справедливо неравенство*

$$\overline{\nu}_{t-1}^P \leqslant P\text{-} \operatorname*{ess\,sup}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \mathbf{M}^Q\left[\overline{\nu}_t^P e^{-(\gamma,\Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right].$$

2) *Для любых* $t \in N_1$ *и* $\gamma \in D_t$ P*-п. н. справедливо неравенство*

$$\overline{\nu}_{t-1}^P \geqslant P\text{-} \operatorname*{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{P}_N} \mathbf{M}^Q\left[\overline{\nu}_t^P e^{-(\gamma,\Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_{t-1}^S\right].$$

4. Из теоремы 1 и следствия вытекает разложение любой ограниченной $\mathcal{F}_t^S$-измеримой случайной величины $f_N(S.)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда относительно любой меры* $Q \in \mathcal{P}_N$ *существуют такие согласованная неубывающая последовательность* $(C_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$, $C_0 = 0$, *и* $\dot{\gamma}_t^{NQ} \in D_{t+1}^N$, *что для любого* $t \in N_1$ Q*-п. н.*

$$\Delta \ln \overline{\nu}_t^Q = (\dot{\gamma}_t^{NQ}, \Delta S_t) + C_t,$$

где $\dot{\gamma}_t^{NQ}$ *определяется из соотношения* Q*-п. н.*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \mathbf{M}^Q\left[\overline{\nu}_{t+1}^P e^{-(\gamma,\Delta S_t)}\Big|\mathcal{F}_t^S\right] = \mathbf{M}^Q\left[\overline{\nu}_{t+1}^P e^{-(\dot{\gamma}_t^{NQ},\Delta S_{t+1})}\Big|\mathcal{F}_t^S\right], \tag{2}$$

причем Q*-п. н.*

$$f_N(S.) = \ln \overline{\nu}_0^Q + \sum_{i=1}^N (\dot{\gamma}_t^{NQ}, \Delta S_t) + C_N. \tag{3}$$

5. Рассмотрим теперь задачу расчета европейского опциона на неполном рынке $(B, S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(d)})$, здесь $S^{(i)} = \{S_t^i\}_{t \in N_0}$, где S_t^i — стоимость i-го рискового актива в момент времени $t \in N_0$, $B = \{B_t\}_{t \in N_0}$ — стоимость безрискового актива. Пусть $\pi = (\gamma_t, \beta_t)_{t \in N_1}$ — предсказуемая последовательность, которую мы будем называть *портфелем.* Будем рассматривать только самофинансирующиеся портфели. Капитал портфеля π в момент времени $t \in N_0$, обозначаемый X_t^π определим равенством $X_t^\pi = \beta_t B_t + (\gamma_t, S_t)$. Задача построения максиминного хеджа европейского опциона состоит в нахождении такого портфеля $\overline{\pi}$, согласованной последовательности $(C^t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$ и начального капитала X_0^π таких, что относительно любой меры $Q \in \mathcal{P}_N$ выполнено равенство (3). Следующее утверждение дает методику построения максиминного хеджирующего портфеля.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Тогда относительно любой меры* $Q \in \mathcal{P}_N$ *существуют такие портфель* $\overline{\pi}$, *неубывающая последовательность* $(C_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$ *и начальный капитал* $X_0^\pi = \ln \overline{\nu}_0^Q$, *что любое ограниченное платежное обязательство* $f_N(S.)$ *допускает представление* Q*-п. н.*

$$f_N(S.) = \ln \overline{\nu}_0^Q + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^Q, \Delta S_i) + C_N,$$

где $\{\overline{\nu}_t^Q\}_{t \in N_0}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (1), $\{\gamma_t^Q\}_{t \in N_0}$ *находится из* (2), *а* $(C_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$ *допускает представление* Q*-п. н.*

$$\Delta C_t = \Delta \ln \overline{\nu}_t^Q - (\gamma_t^Q, \Delta S_t) \geqslant 0, \quad C_t|_{t=0} = 0,$$

при этом количество безрискового актива Q-п. н. удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Delta\beta_{t+1}^{Q} = -\frac{S_t}{B_t}\Delta\gamma_{t+1}^{Q}, \quad \beta_t^{Q}|_{t=0} = \ln\,\overline{\nu}_0^{Q},$$

$\gamma_0^{Q} = 0$, *а капитал портфеля* $\overline{\pi} = (\gamma_t^{Q}, \beta_t^{Q})_{t\in N_1}$ *в момент времени* $t \in N_0$ *допускает представление*

$$X_t^{\overline{\pi}} = \beta_t^{Q} B_t + (\gamma_t^{Q}, S_t), \quad Q\text{-п. н.}$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики. Теория. М.: Фазис, 1998, 1017 с.