Р. О. Богомолов, В. М. Хаметов (Москва, ЦЭМИ РАН). **ε-опциональное разложение.**

1. Введение. Работа, представленная данным докладом, посвящена построению ε-опционального разложения измеримых ограниченных случайных величин, которое обобщает известное опциональное разложение [1].

2. Обозначения. На стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}, P)$, где $N_0 \stackrel{\Delta}{=} \{0, 1, \dots, N\}$, задана d-мерная случайная последовательность $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_0}$. Положим для любого $t \in N_0$: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S \stackrel{\Delta}{=} \sigma\{S_0, S_1, \dots, S_t\}$ и $\mathcal{F}_N^S = F$, а $f_N(S.)$ — $\mathcal{F}_N$-измеримая ограниченная случайная величина.

Пусть $\mathfrak{P}(\Omega, F)$ — множество вероятностных мер, эквивалентных мере P. Пусть $\xi(\omega)$ — ограниченная случайная величина, обозначим $M^Q\xi(\omega) \stackrel{\Delta}{=} \int_\Omega \xi(\omega)Q(d\omega)$, где любая $Q \in \mathfrak{P}(\Omega, F)$.

Пусть $(\gamma_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_1}$ $(N_1 \stackrel{\Delta}{=} \{1, 1, \dots, N\})$ — предсказуемая d-мерная последовательность, $\{\gamma_t\}_{t\in N_1}$ назовем *стратегией.* Множество стратегий обозначим U_1^N. Рассмотрим $\widetilde{U}_1^N$ — любое подмножество множества U_1^N. Обозначим $\widetilde{U}_{t+1}^N$ $(\widetilde{U}_t)$ сужение $\widetilde{U}_1^N$ на $\{t+1, t+2, \dots, N\}$ $(\{t\})$ и будем использовать обозначение $\gamma_{t+1}^N \in \widetilde{U}_{t+1}^N$ $(\gamma_t \in \widetilde{U}_t)$.

Для любых $t \in N_0$, $Q \in \mathfrak{P}(\Omega, F)$ и $\gamma_{t+1}^N \in \widetilde{U}_{t+1}^N$ $\mathcal{F}_t$-измеримую функцию $I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t) \stackrel{\Delta}{=} M^Q[\exp\{f_N(S.) - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i)\}|\mathcal{F}_t]$ назовем *оценкой* бистратегии (Q, γ_{t+1}^N), где $\Delta S_i \stackrel{\Delta}{=} S_i - S_{i-1}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$.

3. Формулировка вспомогательных результатов.

Определение. $\mathcal{F}_t^S$-измеримую функцию $\overline{V}_t$, определяемую равенством $\overline{V}_t = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$, назовем *верхним гарантированным значением в момент времени* $t \in N_0$.

Определение. Стратегию $\gamma_1^N \in U_1^N$ назовем *допустимой*, если

$$\sup_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} M^Q I_0^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0) < \infty.$$

Множество допустимых стратегий обозначим D_1^N.

Теорема 1. *Пусть фильтрация $\{\mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$ — универсально полна [1], функция $f_N(S_\bullet)$ — $\mathcal{F}_N^S$-измеримая ограниченная случайная величина. Тогда $\{\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$ P-п. н. удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{aligned} &\overline{V}_t = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}\in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} M^Q t\Big[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\Big|\mathcal{F}_t^S\Big], \\ &\overline{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$, стратегию $\varphi_1^N \in D_1^N$ назовем *ε-оптимальной,* если выполнено неравенство $\operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} I_0^{(Q)}(S., \varphi_1^N) \leqslant \overline{V}_0 e^\varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует допустимая ε-оптимальная стратегия $\varphi_1^{\varepsilon,N}$ $(\in D_1^N t)$, причем для любого $t \in N_1$ справедливо неравенство P-п. н.*

$$\overline{V}_t e^{\varepsilon/N} \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} M^Q\Big[\overline{V}_{t+1} e^{-(\varphi_{t+1}^\varepsilon,\Delta S_{t+1})}\Big|\mathcal{F}_t^S\Big]. \tag{2}$$

4. Формулировка основного результата.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$ и существуют такие $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина X_0, последовательность $\{\varphi_t\}_{t\in N_1}$, где $\varphi_t \in D_t$, и возрастающая последовательность $\{C_t\}_{t\in N_1}$, причем $C_0 = 0$, что относительно любой меры $Q \in \mathfrak{P}(\Omega, F)$ справедливо равенство $f_N(S.) = X_0 + \varepsilon + \sum_{i=1}^N (\varphi_i, \Delta S_i) - C_N$, Q-п. н.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие возрастающая последовательность* $\{C_t^\varepsilon\}_{t \in N_1}$ *(зависящая от* ε*),* $\{\varphi_t^\varepsilon\}_{t \in N_1}$ *— допустимая* ε*-оптимальная стратегия и начальный капитал* X_0*, что относительно любой меры* $Q \in \mathfrak{P}(\Omega, F)$*:* $f_N(S_\cdot) = X_0 + \varepsilon + \sum_{i=1}^N (\varphi_i^\varepsilon, \Delta S_i) - C_N^\varepsilon$*, Q-п. н., где* $X_0 = \ln \overline{V}_0$*, причем для любого* $t \in N_0$ *последовательность* $(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t)$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* (1)*, а* $(\varphi_t^\varepsilon, \mathcal{F}_t)$ *— неравенству* (2).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики (теория). М.: Фазис, 1998, 1017 с.