М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Вычисление объема порядкового многогранника частично упорядоченного множества.**

Пусть $(P, \leqslant)$ — конечное частично упорядоченное множество и $\pi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to P$ — биекция. *Порядковым многогранником* (см. [1]) множества $(P, \leqslant)$ называется множество точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условиям: $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ и $x_i \leqslant x_j \Leftrightarrow \pi(i) \leqslant \pi(j)$ для всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно, что объем $V(P)$ порядкового многогранника множества $(P, \leqslant)$ не зависит от выбора биекции π. Вычисление объемов порядковых многогранников представляет интерес для многих задач дискретной геометрии и перечислительной комбинаторики. Мы рассмотрим вычисление объема порядкового многогранника частино упорядоченного множества $(P, \leqslant)$, для которого существует биекция $\pi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to P$, удовлетворяющая специальным ограничениям.

Определим отношение покрытия на множестве P условием

$$a \prec b \Leftrightarrow (a \leqslant b) \wedge (a \neq b) \wedge \forall c \in P[(a \leqslant c) \wedge (c \leqslant b) \Rightarrow (c = a) \vee (c = b)].$$

Обозначим $(P_i, \leqslant_i)$ подмножество частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$ с носителем $P_i = \{1, 2, \ldots, i\}$ и порядком $\leqslant_i$, индуцированным порядком в $(P, \leqslant)$. Отношение покрытия в $(P_i, \leqslant_i)$ обозначим $\prec_i$. Предположим, что существует биекция $\pi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to P$, удовлетворяющая условиям: для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует не более одного такого элемента $j \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$, что $j \prec_i i$, и не более одного такого элемента $k \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$, что $i \prec_i k$. Определим ориентированный граф G с множеством вершин $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ следующим образом. Для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ дуга (i, j) принадлежит орграфу G тогда и только тогда, когда $i > j \;\&\; (\pi(j) \prec_i \pi(i) \vee \pi(i) \prec_i \pi(j))$, дуга $(i, 0)$ принадлежит G тогда и только тогда, когда $\pi(i)$ — максимальный элемент множества $(P_i, \leqslant_i)$. Других дуг в орграфе G нет. Тогда из каждой вершины G выходит не более двух дуг и если для каждой вершины, отличной от 0, выбрать ровно одну исходящую из нее дугу, то получится корневое дерево T с корнем 0, ориентированное в сторону корня. Пусть (i, j) — дуга орграфа G. Будем говорить, что элементы i и j образуют инверсию, если $\pi(j) \leqslant \pi(i)$. Будем обозначать $\operatorname{inv}(T)$ число инверсий в дереве T, полученном описанным способом. Обозначим также f^T число возрастающих нумераций вершин дерева T, т. е. биекций σ из $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ в множество вершин T, для которых из $\sigma(i) < \sigma(j)$ следует $i < j$ для всех $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Известная формула крюков для деревьев утверждает, что $f^T = (n+1)!/\prod_{v \in T} h_v$, где произведение берется по всем вершинам v дерева T и h_v есть число вершин поддерева дерева T с корнем v.

Теорема. *Объем порядкового многогранника частично упорядоченного множества $(P, \leqslant)$, для которого существует биекция $\pi\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to P$, удовлетворяющая описанным выше условиям, равен*

$$V(P) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{T \in S(G)} (-1)^{\operatorname{inv}(T)} f^T,$$

где суммирование ведется по всем остовным деревьям T орграфа G с корнем 0*, ориентированным в сторону корня.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 8-01-00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stanley R. P.* Two poset polytopes. — Discrete Comput. Geom., 1986, v. 1, № 1, p. 9–23.