М. И. Толовиков (Череповец, ЧГУ). **Распределение приращения числа возрастаний в случайной перестановке при случайном прореживании.**

В [1] расмотрена следующая модель подсчета числа возрастаний в случайной перестановке при случайном прореживании. Пусть на множестве S_n всех перестановок элементов $1, 2, \ldots, n$ задано равномерное распределение вероятностей и $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\} \in S_n$ — случайная перестановка. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ — не зависящая от π последовательность независимых одинаково распределенных случайных индикаторов и $\mathbf{P}\{\varepsilon_1 = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{\varepsilon_1 = 0\} = q$, $p + q = 1$. Положим $D_n = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \, I\{\pi_i < \pi_{i+1}\}$, где $I\{\pi_i < \pi_{i+1}\}$ обозначает индикатор события $\{\pi_i < \pi_{i+1}\}$. Тогда D_n есть число зарегистрированных возрастаний в перестановке π, если считать, что каждое возрастание регистрируется с вероятностью p и не регистрируется с вероятностью q.

Рассмотрим здесь другую модель, которая, как оказывается, приводит к тому же распределению вероятностей, что и в [1]. Пусть, как и выше, $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\} \in S_n$ — случайная равновероятная перестановка на множестве из n элементов. *Числом возрастаний в перестановке* π называется случайная величина $R_n = \sum_{i=1}^{n-1} I\{\pi_i < \pi_{i+1}\}$. Пусть $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$ — подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, причем $j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} < j_k = n$. Рассмотрим подпоследовательность $\pi|_J = \{\pi_{j_1}, \pi_{j_2}, \ldots, \pi_{j_k}\}$ последовательности $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n\}$. Положим $R_J = \sum_{i=1}^{k-1} I\{\pi_{j_i} < \pi_{j_{i+1}}\}$ — число возрастаний в последовательности $\pi|_J$. Случайная величина $R_n - R_J$ есть приращение числа возрастаний при переходе от подпоследовательности $\pi|_J$ к перестановке π.

Теорема 1. *Распределение случайной величины $R_n - R_J$ совпадает с распределением суммы независимых случайных величин $Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_k$, которые распределены так же, как числа возрастаний в перестановках из $j_1, j_2 - j_1, \ldots, j_k - j_{k-1}$ элементов соосветственно* (*число возрастаний в перестановке из одного элемента считаем равным нулю*).

Рассмотрим теперь модель случайного прореживания. Пусть подмножество J множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, содержащее n, выбирается наудачу по схеме Бернулли с параметрами $n-1$, q, т.е. каждый элемент $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, отличный от n, включается в J с вероятностью q и не включается в J с вероятностью $p = 1 - q$ независимо от остальных элементов (элемент n обязательно включается в J). Тогда вероятность получить подмножество $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$, где $j_k = n$, равна $q^{k-1} p^{n-k}$. Кроме того, считаем, что подмножество J и перестановка π независимы. Случайную величину $\Delta_n = R_n - R_J$ можно рассматривать как уменьшение числа возрастаний при переходе от перестановки π к $\pi|_J$, т. е. при случайном прореживании.

Теорема 2. *Распределения случайных величин D_n и Δ_n совпадают.*

Таким образом, для распределения случайной величины Δ_n справедливы результаты из [1].

Наконец, вычислим производящую функцию, описывающую распределения случайных величин Δ_n (и D_n). Пусть $A(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{P}\{\Delta_n = m\} x^n y^m$.

Теорема 3. $A(x,y) = (e^{px(y-1)} - 1)/(1 + p(y-1) - e^{px(y-1)})$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-01-00078а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Толовиков М. И.* Распределение числа возрастаний в перестановке при случайном прореживании. — Обозрение прикл. и промышл. матем., 2007, т. 14, в. 2, с. 356–357.